Vieta jumping

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

23. januar 2025

Uvod

Zapiski so kot spremljevalno gradivo namenjeni srečanju matematičnega krožka na Gimnaziji Bežigrad, ki sem ga vodil 23. januarja 2025.

Cilj je spoznati strategijo reševanja nalog iz teorije števil, znano kot "Vieta jumping".

Bralcu priporočam, da najprej vsako nalogo poskusi rešiti sam, šele nato pa prebere rešitev. V primeru morebitnih vprašanj ali popravkov me lahko kontaktirate.

Kazalo

1 Vietove formule

Kot nam morda namigne že ime "Vieta jumping", ključno vlogo v nadaljevanju igrajo Vietove formule. Tipično imamo opravka z neko kvadratno enačbo $ax^2 + bx + c = 0$. V tem primeru sta rešitvi podani s formulo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Vietovi formuli pa nam povzame sledeča lema.

Lema: Vietovi formuli za kvadratno enačbo

Za rešitvi x_1 in x_2 kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, kjer $a \neq 0$, velja

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{in} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dokaz. Velja

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + (-ax_1 - ax_2)x + ax_1x_2. \qquad \square$$

V splošnem nam Vietove formule opiše naslednja trditev.

Trditev: Vietove formule

Naj bo $p = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ polinom stopnje n in naj bodo $z_1, \ldots z_n$ njegove ničle. Potem za $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^{k} z_{i_j} \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Poglejmo si trditev na primeru polinoma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ki ima ničle z_1, z_2 in z_3. Vietove formule nam podajo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_2 &= \frac{c}{a}, \\ z_1 z_2 z_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

2 Opis strategije in zgodovinski primer

V tem razdelku predstavimo našo glavno strategijo – "Vieta jumpung". V angleščini je poznana tudi pod imenom "root flipping". V osnovni obliki lahko pristop lahko povzamemo v štirih glavnih korakih.

Strategija: Vieta jumping

- Predpostavimo, da obstaja rešitev, ki se ne sklada z zahtevo naloge.
- Vzamemo najmanjšo takšno rešitev (a, b), kjer si izberemo smiselno definicijo[a] minimalnosti.
- Zamenjamo a s spremenljivko x in dobimo enačbo, ki ima a za eno izmed rešitev.
- S pomočjo Vietovih formul pokažemo, da naša predpostavka implicira obstoj manjše rešitve, torej dobimo protislovje.

[a] Pogosto želimo minimalizirati $a + b$.

Pripomnimo še, da lahko zgornjo strategijo tudi posplošimo. Torej vzamemo minimalno rešitev $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, nekatere a_i-je zamenjamo z x in nadaljujemo na analogen način, kot je opisano zgoraj.

Zgodovinsko se je v "olimpijski matematiki" strategija prvič pojavila na Mednarodni matematični olimpijadi leta 1998 v rešitvi sledeče naloge, ki je takrat veljala za zelo težko.

Naloga 2.1: IMO 1988/6

Naj bosta a in b takšni pozitivni celi števili, da $ab + 1$ deli $a^2 + b^2$. Pokažite, da je

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

popoln kvadrat.

Rešitev. Poskusimo slediti točkam, ki smo jih navedli zgoraj.

- Recimo, da obstaja takšna rešitev (a, b), da

  $$k := \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

  ni popoln kvadrat.

- Fiksirajmo k in poglejmo množico rešitev enačbe

  $$k = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1}$$

  nad naravnimi števili. Naj bo (A, B) takšna rešitev, da je vsota $A + B$ minimalna. Zaradi simetrije lahko brez škode za splošnost predpostavimo $A \geq B$.

- Poglejmo kvadratno enačbo
$$x^2 + (-kB)x + (B^2 - k).$$
Rešitvi sta $x_1 = A$ in x_2.

- Vietovi formuli povesta
$$x_2 = kB - x_1 = kB - A \quad \text{in} \tag{1}$$
$$x_2 = \frac{B^2 - k}{x_1} = \frac{B^2 - k}{A}. \tag{2}$$
Iz (1) sledi, da je x_2 celo število. Iz
$$\frac{x_2^2 + B^2}{x_2 B + 1} = k > 0$$
dobimo $x_2 B > -1$. Recimo, da je $x_2 = 0$. Tedaj iz (2) sledi $k = b^2$, kar je protislovje. Torej je $x_2 > 0$. Sedaj upoštevamo $A \geq B$ in dobimo
$$x_2 = \frac{B^2 - k}{A} < \frac{B^2}{A} \leq A.$$
To je v protislovju z minimalnostjo $A + B$. □

3 Rešene naloge

Naloga 3.1

Naj bodo a, b in c takšna naravna števila, da velja
$$0 < a^2 + b^2 - abc < c.$$
Dokažite, da je $a^2 + b^2 - abc$ popoln kvadrat.

Rešitev. Fiksirajmo c in predpostavimo, da obstajata takšna a in b, da število $k := a^2 + b^2 - abc$ ni popoln kvadrat. Sedaj pri fiksnem k pogledamo množico rešitev enačbe
$$A^2 + B^2 - ABc = k.$$
Naj bo (A, B) takšna rešitev, ki minimalizira $A + B$. Zaradi simetrije lahko brez škode za splošnost predpostavimo $A \geq B$. Kvadratna enačba
$$x^2 - Bcx + B^2 - k = 0$$
ima dve rešitvi, $x_1 = A$ in x_2. Vietovi formuli nam povesta
$$x_2 = Bc - A \tag{3}$$
in
$$x_2 = \frac{B^2 - k}{A} \tag{4}$$
Iz (3) sledi, da je x_2 celo število. Sedaj ločimo tri primere glede na predznak x_2.

- Recimo, da je $x_2 = 0$. Tedaj iz (4) sledi $B^2 - k = 0$, kar je v protislovju s tem, da k ni popoln kvadrat.
- Recimo, da je $x_2 < 0$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^2 + B^2 - x_2Bc - k \\ &> x_2^2 + B^2 - x_2Bc - c \\ &> x_2^2 + B^2 + c(-x_2B - 1). \end{aligned}$$

  Ker je x_2 negativno število, je zadnji izraz pozitiven, torej

$$x_2^2 + B^2 + c(-x_2B - 1) \geq 0,$$

  kar je ponovno protislovje.
- Če je x_2 pozitivno celo število, zaradi minimalnosti $A + B$ velja

$$x_2 \geq x_1 = A. \tag{5}$$

  Iz (4) in (5) sedaj sledi $B^2 - k \geq A^2$, kar pa je v protislovju z $A \geq B$. □

Naloga 3.2

Dokažite, da ima za vsako realno število N enačba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

rešitev, kjer so a, b, c in d cela števila, večja od N.

Rešitev. Opazimo, da je $(1, 1, 1, 1)$ trivialna rešitev. S pomočjo te rešitve bomo generirali neskončno rešitev.

Zgornjo enačbo si lahko predstavljamo kot kvadratno enačbo v spremenljivki a:

$$a^2 + (-bc - cd - db)a + (b^2 + c^2 + d^2 - bcd) = 0.$$

Ta enačba ima rešitvi $a_1 = a$ in a_2. Vietova formula nam pove

$$a_2 = bc + cd + db - a.$$

Recimo, da je (x, y, z, w) rešitev zgornje kvadratne enačbe. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $w \geq z \geq y \geq x$. Pokazali smo, da je potem tudi $(yz + zw + wy - x, y, z, w)$ rešitev. Ker velja

$$yz + zw + wy - y \geq w \geq z \geq y \geq x,$$

smo torej dobili novo rešitev, pri čemer smo povečali najmanjši element v prvotni rešitvi. Ta proces lahko ponavljamo, dokler ne dobimo takšne rešitve (a, b, c, d), da bodo števila a, b, c in d večja od N. □

Naloga 3.3: IMO 2007/5

Naj bosta a in b takšni naravni števili, da $4ab-1$ deli $(4a^2-1)^2$. Dokažite, da je $a=b$.

Rešitev. Preden lahko uporabimo našo strategijo, poenostavimo pogoj o deljivosti. Iz $\gcd(b, 4ab-1)=1$ sledi

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \Leftrightarrow 4ab-1 \mid b^2(4a^2-1)^2.$$

Torej

$$\begin{aligned} b^2(4a^2-1)^2 &= 16a^4b^2 - 8a^2b^2 + b^2 \\ &\equiv a^2 - 2ab + b^2 \pmod{4ab-1} \\ &= (a-b)^2, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $16a^2b^2 \equiv (4ab)^2 \equiv 1$ in $4ab \equiv 1 \pmod{4ab-1}$.

Recimo, da (a,b) zadošča pogoju deljivosti, vendar $a \neq b$. Fiksirajmo $k = \frac{(a-b)^2}{4ab-1}$. Opazimo, da iz $a \neq b$ sledi $k > 0$. Sedaj nadaljujemo na standarden način. Poglejmo vse rešitve (x,y) enačbe

$$k = \frac{(x-y)^2}{4xy-1}$$

v naravnih številih. Naj bo (A,B) rešitev, ki minimalizira $A+B$. Zaradi simetrije lahko brez škode za splošnost predpostavimo $A \geq B$. Kvadratna enačba

$$x^2 - (2B+4kB)x + B^2 + k = 0$$

ima rešitvi $x_1 = A$ in x_2. Vietovi formuli nam povesta

$$x_2 = 2B + 4kB - A \qquad \text{in} \qquad x_2 = \frac{B^2+k}{A}.$$

Sledi, da je x_2 naravno število. Zaradi minimalnosti $A+B$ velja še $x_2 \geq A$. Torej

$$\frac{B^2+k}{A} \geq A \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{(A-B)^2}{4AB-1} = k \geq A^2 - B^2.$$

Od tu sledi

$$A - B \geq (4AB-1)(A+B) \geq A+B,$$

kar je protislovje. □

4 Dodatne naloge

1. Poiščite vse pare takšnih celih števil m in n, da je $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ celo število.

2. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da ab deli $a^2 + b^2 + 1$. Dokažite, da velja $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

3. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da je
$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$$
celo število. Določite vse možne vrednosti k.

4. Naj bo k naravno število različno od 1 in 3. Dokažite, da je $(0, 0, 0)$ edina celoštevilska rešitev
$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz.$$

5. (IMO SL 2017 N6) Poiščite najmanjše naravno število n ali dokažite, da takšen n ne obstaja, ki zadošča sledeči lastnosti: Obstaja neskončno mnogo različnih n-teric takšnih pozitivnih racionalnih števil $(a_1, \dots, a_n)$, da sta
$$a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{in} \qquad \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$
celi števili.

6. (IMO SL 2019 N8) Naj bosta a in b naravni števili. Dokažite, da
$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$
ni popoln kvadrat.

7. (Kitajska 2018) Poiščite vse takšne pare naravnih števil, da je $(xy + 1)(xy + x + 2)$ popoln kvadrat.

Literatura

[1] Brilliant.org. *Vieta Root Jumping*. URL: https://brilliant.org/wiki/vieta-root-jumping/ (pridobljeno 29. 10. 2024).

[2] Aditya Khurmi. *Modern Olympiad Number Theory*. 2020. URL: https://www.academia.edu/44512122/Modern_Olympiad_Number_Theory.

[3] Justin Stevens. *Olympiad Number Theory Through Challenging Problems*. 3. izd. 2017.