Vaje iz teorije mere

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

5. november 2025

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrane rešitve nekaterih nalog iz vaj pri Teoriji mere na UL FMF v šolskem letu 2025/26. Bralec lahko vse naloge (in še mnogo drugih) najde v [1].

Dokument zagotovo vsebuje veliko napak – bralcu v izziv je prepuščeno, da jih najde.

1 Merljive množice

1.1 σ-algebre

Definicija

Naj bo X neprazna množica. Družina $\mathcal{A}$ podmnožic X je *σ-algebra*, če ima naslednje lastnosti:

(i) Velja $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Če je $A \in \mathcal{A}$, je tudi $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Če je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, je tudi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Pravimo, da je $(X, \mathcal{A})$ *merljiv prostor*, množicam $\mathcal{A}$ pa *merljive množice*.

Velja še:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Zaprtost za končne preseke.
- Poljuben presek σ-algeber je σ-algebra.
- Najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $B \subseteq X$, označimo s $\sigma(B)$.

Naloga 1.1

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Za množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mathcal{A}_E := \{E \cap F \mid F \subseteq E\}.$$

Dokažite, da je $\mathcal{A}_E$ σ-algebra na E.

Rešitev. **(i)**: Velja $E = E \cap E \in \mathcal{A}_E$.

(ii): Naj bo $A = E \cap F \in \mathcal{A}$. Tedaj je $A^c = E \setminus A = E \cap A^{\tilde{c}}$, kjer je A^c komlement A v E, $A^{\tilde{c}}$ pa komplement A v X. Sledi, da je $A^c \in \mathcal{A}_E$.

(iii): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Tedaj

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap F_i) = E \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \in \mathcal{A}_E,$$

saj je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \in \mathcal{A}$. □

Naloga 1.2

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathcal{A}_n = \sigma\left(\{1\}, \ldots, \{n\}\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

(a) Dokažite, da je $\mathcal{A}_n = \left\{E \subseteq \mathbb{N} \;\middle|\; E \subseteq [n] \text{ ali } E^C \subseteq [n]\right\}$,

(b) Dokažite, da je $\mathcal{A}_n$ prava podmnožica v $\mathcal{A}_m$ za $m < n$.

(c) Dokažite, da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ni σ-algebra.

Rešitev. **(a)**: Označimo $\mathcal{B}_n = \left\{E \subseteq \mathbb{N} \;\middle|\; E \subseteq [n] \text{ ali } E^C \subseteq [n]\right\}$. Najprej pokažimo, da je $\mathcal{B}_n$ σ-algebra.

(i): Ker je $\mathbb{N}^c \subseteq [n]$, je $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$.

(ii): Zaprtost za komplemente velja zaradi simetričnosti definicije.

(iii): Naj bo $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$. Če so vsi $B_i \subseteq [n]$, potem je tudi njihova unija vsebovana v $[n]$. Podobno, če so vsi B_i^c vsebovani v $[n]$. Če pa je $B_i \subseteq [n]$ in $B_j^c \subseteq [n]$, pa je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{N}$.

Očitno $\mathcal{B}_n$ vsebuje vse generatorje $\mathcal{A}_n$, torej $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$. Obratno, če je $B \in \mathcal{B}$ vsebovan v $[n]$, je unija singletonov, torej je $B \in \mathcal{A}$. Podobno, če je $B^c \subseteq [n]$. Zato je tudi $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ oziroma skupaj $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n$.

(b): Če je $n < m$, potem $\{m\} \not\subseteq [n]$ in $\{m\}^c \not\subseteq [n]$, torej $m \notin \mathcal{A}_n$.

(c): Če bi unija bila σ-algebra, bi bila potenčna σ-algebra saj vsebuje vse singletone. Po drugi strani pa je to družina množic, ki so končne ali pa imajo končne komplemente. Tako na primer $2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in tudi ni v uniji, kar je protislovje. □

Naloga 1.3

Naj bo X neštevna množica in

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ je števna ali } E^c \text{ je števna}\}.$$

(a) Dokažite, da je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X.

(b) Dokažite, da je $\mathcal{A} = \sigma(\{\{x\} \mid x \in X\})$.

Rešitev. **(i)**: Ker je $X^c = \emptyset$ števna množica, je $X \in \mathcal{A}$.

(ii): Zaprtost za komplemente velja zaradi simetrije definicije $\mathcal{A}$.

(iii): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Če so vsi A_i števni, je števna tudi njihova unija (števna unija števnih množic je števna). Recimo, da je $A_j \in \mathcal{A}$ neštevna (in A_j^c števna) množica. Tedaj

$$A_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \implies \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c \subseteq A_j^c,$$

torej je komplement unije števen.

Označimo $\mathcal{B} = \sigma(\{\{x\} \mid x \in X\})$. Očitno $\mathcal{A}$ vsebuje vse generatorje $\mathcal{B}$, torej $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Če je $A \in \mathcal{A}$ števna množica, je števna unija singletonov, torej je vsebovana v $\mathcal{B}$. Podobno velja, če je A^c števna množica, torej je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Skupaj smo dokazali $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

Naloga 1.4

Naj bo $\mathcal{A}$ neskončna σ-algebra.

(a) Dokažite, da v $\mathcal{A}$ obstaja neskončno strogo padajoče zaporedje paroma različnih množic.

(b) Dokažite, da je kardinalnost neskončne σ-algebra vsaj kontinuum.

Rešitev. **(a)**: Poiščimo pravo merljivo podmnožico, ki ima neskončno merljivih podmnožic. Naj bo $\emptyset \neq E \neq X$ merljiva podmnožica. Pokažimo, da ima ena od množic E in E^c iskano lastnost. Če je $F \in \mathcal{A}$, potem sta $F \cap E$ in $F \cap E^c$ merljivi množici za kateri velja $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$. Če ima E m merljivih podmnožic, E^c pa n, potem dobimo največ $m \cdot n$ možnih $F \in \mathcal{A}$, kar je v protislovju z neskončnostjo $\mathcal{A}$.

Naj bo $E_0 = X$ in E_1 tista od množic E in E^c, ki ima neskončno merljivih podmnožic. Tedaj je $\mathcal{A}_{E_1}$ neskončna σ-algebra. Nadaljujemo induktivno in dobimo strogo padajoče zaporedje $(E_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b): Naj bo $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ preslikava podana z $S \mapsto \bigcup_{i\in S}(E_i \setminus E_{i+1})$. Pokažimo, da je injektivna. Množica $F_i := E_i \setminus E_{i+1} \neq \emptyset$ so paroma disjunktne, saj E_i strogo padajo. Če sta S in T različni podmnožici $\mathbb{N}$, brez škode za splošnost obstaja $x \in S \setminus T$. Tedaj je $F_x \subseteq f(S)$ in $F_x \not\subseteq f(T)$, torej $f(S) \neq f(T)$. Sledi $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{A}|$. □

1.2 Pozitivne mere

Definicija

Pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je preslikava $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, ki zadošča:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- Če so $A_1, A_2, \ldots$ paroma disjunktne množice iz $\mathcal{A}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Mera je *končna*, če je $\mu(X) < \infty$.

Velja še:

- Monotonost: $\mu(A) \leq \mu(B)$ za $A \subseteq B$.
- Za poljubne množice $A_1, A_2, \ldots$ iz $\mathcal{A}$ velja
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek

Naj bo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končna aditivna funkcija, kjer je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Tedaj je μ mera natanko tedaj, kadar za vsako naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ množic velja
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Iz splošnega zaporedja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lahko tvorimo naraščajoče zaporedje
$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Izrek

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje množic v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem je
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Naloga 1.5

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Dokažite, da za merljivi podmnožici $A, B \in \mathcal{A}$ velja
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Rešitev. Ker je
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
unija disjunktnih množic, velja
$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 2\mu(A \cap B)\\ &= \mu((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + \mu((B \setminus A) \cup (A \cap B))\\ &= \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$
□

Naloga 1.6

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero. Recimo, da je mera merljive množice $A \in \mathcal{A}$ enaka $\mu(X)$. Dokažite, da za poljubno množico $B \in \mathcal{A}$ velja $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

Rešitev. Upoštevamo monotonost mere in dobimo

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(X) = \mu(A),$$

kar pomeni, da je $\mu(A) = \mu(A \cup B)$. Iz prejšnje naloge vemo, da je

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(a \cup B) + \mu(B).$$

Ker je mera μ končna, lahko krajšamo in dobimo $\mu(B) = \mu(A \cap B)$. □

Rešitev. Iz $\mu(A) = \mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$ sledi $\mu(A^c) = 0$. Torej je

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A^c) \leq \mu(A^c) = 0$$

oziroma

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B).$$ □

Definicija

Lastnost $\mathcal{L}$ velja za *skoraj vse* $x \in X$, če je $\mu(\{x \mid \mathcal{L} \text{ ne velja za } x\}) = 0$.

Naloga 1.7

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje množic iz $\mathcal{A}$.

(a) Dokažite, da velja

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(b) Dokažite, da je množica

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$$

enaka množici vseh $x \in X$, ki so vsebovani v vseh razen v končno mnogo množicah E_n.

(c) Če je $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, dokažite, da je skoraj vsak $x \in X$ vsebovan v končno mnogo množicah E_n.

Rešitev. Left as an exercise to the reader. □

Definicija

Mera μ na X je:

- *σ-končna*, če lahko zapišemo X kot števno unijo (paroma disjunktnih) množic s končno mero.
- *semi-končna*, če ima vsaka množica z neskončno mero podmnožico s končno pozitivno (neničelno) mero.

Naloga 1.8

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z neskončno mero.

(a) Dokažite, da je vsaka σ-končna mera semi-končna.

(b) Če je μ semi-končna mera, dokažite, da za vsak $c > 0$ obstaja takšen $E \in \mathcal{A}$, da je $c < \mu(E) < \infty$.

(c) Če je μ σ-končna, dokažite, da za vsak $c > 0$ obstaja takšen $E \in \mathcal{A}$, da je $c < \mu(E) < \infty$.

Rešitev. **(a)**: Naj bo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kjer so X_n paroma disjunktne množice s končnimi merami, in A množica z neskončno mero. Tedaj je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)$$

unija paroma disjunktnih množic in velja

$$\infty = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n \cap A) \neq 0.$$

To pomeni, da obstaja takšen $n \in \mathbb{N}$, da je $\mu(X_n \cap A) \neq 0$. Po drugi strani pa je $\mu(X_n \cap A) \leq \mu(X_n) < \infty$, torej je mera $X_n \cap A$ končna, kar pomeni, da je μ semi-končna.

(b): Naj bo

$$C := \sup \{\mu(X') \mid X' \in \mathcal{A}, \mu(X') < \infty\}$$

Dokazati želimo, da je $C = \infty$. Recimo, da je $C < \infty$. Tedaj obstaja takšno zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da je $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = C$. Sedaj tvorimo naraščajoče zaporedje

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

za katerega velja $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Torej je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n).$$

Ker je

$$\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) < \infty,$$

iz definicije C sledi $\mu(B_n) \leq C$. Po drugi strani pa, ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu(A_n),$$

sledi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq C,$$

iz česar skupaj dobimo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = C.$$

Ker je $\mu(X) = \infty$, to pomeni, da je

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \infty.$$

Ker je μ semi-končna, torej obstaja takšna množica $E \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$, da je $0 < \mu(E) < \infty$. Sledi

$$\infty > \mu\left(E \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu(E) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > C,$$

kar pa je v protislovju z definicijo C.

(c): Sledi iz točk (a) in (b). □

Naloga 1.9

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ. Za poljubno množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mu_0(E) = \sup\left\{\mu(F) \mid \mu(F) < \infty, F \subseteq E, F \in \mathcal{A}\right\}.$$

Dokažite, da je μ_0 pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

Rešitev. Left as an exercise to the reader. □

Naloga 1.10

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bodo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšne merljive množice, da velja $\mu(E_n \cap E_m) = 1$ za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$. Izračunajte

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Rešitev. Left as an exercise to the reader. □

Naloga 1.11

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni[a] prostor in naj bo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšno zaporedje merljivih množic, da je 1 stekališče zaporedja $(\mu(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dokažite, da za vsak $0 < \varepsilon < 1$ obstaja takšno podzaporedje $(E_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da velja

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \varepsilon.$$

[a] $\mu(X) = 1$

Rešitev. Left as an exercise to the reader. □

1.3 Zunanje mere

Definicija

Zunanja mera na X je preslikava $\xi\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$, ki zadošča:

- $\xi(\emptyset) = 0$.
- $\xi(B) \leq \xi(A)$ za $B \subseteq A$.
- Za vsako zaporedje (A_n) velja

$$\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n).$$

Množica $A \subseteq X$ je ξ*-merljiva*, če je

$$\xi(Y) = \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y)$$

za vse $Y \subseteq X$. Množico vseh ξ-merljivih množic označimo z $\mathcal{A}_\xi$.

Ekvivalentno je množica $A \subseteq X$ ξ-merljiva, če je

$$\xi(Y) \geq \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y)$$

za vse $Y \subseteq X$, $\xi(Y) < \infty$.

Naloga 1.12

Naj bo ξ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $A \subseteq X$ poljubna množica. Naj za množico $B \subseteq X$ velja $\xi(B) = 0$. Dokažite, da je B ξ-merljiva in izračunaj $\xi(A \cup B)$.

Rešitev. Zaradi monotonosti velja

$$\xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c) \leq \xi(B) + \xi(Y) = \xi(Y),$$

torej je B ξ-merljiva. Iz

$$\xi(A) \leq \xi(A \cup B) \leq \xi(A) + \xi(B) = \xi(A)$$

sledi $\xi(A \cup B) = \xi(A)$. $\square$

Naloga 1.13

Naj bo ξ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $E \subseteq X$ poljubna ξ-merljiva množica v X. Dokažite, da za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ velja

$$\xi(A \cup E) + \xi(A \cap E) = \xi(A) + \xi(E).$$

Rešitev. Ker je $E \in \mathcal{A}_\xi$, velja

$$\xi(A \cup E) = \xi((A \cup E) \cap E) + \xi((A \cup E) \cap E^c) = \xi(E) + \xi(A \setminus E).$$

Sledi

$$\begin{aligned}\xi(A \cup E) + \xi(A \cap E) &= \xi(E) + \xi(A \setminus E) + \xi(A \cap E) \\ &= \xi(E) + \xi(A \cap E^c) + \xi(A \cap E) \\ &= \xi(E) + \xi(A).\end{aligned}$$ □

Izrek: Carathéodory

Če je ξ zunanja mera na X, je $\mathcal{A}_\xi$ σ-algebra in $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ mera in $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ poln prostor z mero.

Naloga 1.14

Naj bo ξ zunanja mera na potencni množici neprazne množice X in naj bo A poljubna podmnožica v X. Naj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka ξ-merljiva podmnožica $E \subseteq A$, da je $\xi(A \setminus E) < \varepsilon$. Dokažite, da je A ξ-merljiva.

Rešitev. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja takšna ξ-merljiva množica $E_n \subseteq A$, da je $\xi(A \setminus E_n) < \frac{1}{n}$. Množica

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq A$$

je ξ-merljiva po Carathéodoryjevem izreku. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\xi(A \setminus E) \leq \xi(A \setminus E_n) < \frac{1}{n},$$

zato je $\xi(A \setminus E) = 0$, kar po zgornji nalogi pomeni, da je $A \setminus E \in A_\xi$. Ker je A_ξ σ-algebra, je $A = (A \setminus E) \cup E \in \mathcal{A}_\xi$. □

1.4 Polalgebre in razširitve mer

Definicija

Left as an exercise to the reader.

Naloga 1.15

Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na X in $\mathcal{A}$ algebra na X, generirana s $\mathcal{S}$. Naj bo μ polmera na $\mathcal{S}$. Za $A \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j),$$

kjer je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ neka končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$. Dokažite, da je $\tilde{\mu}$ dobro definirana mera na algebri $\mathcal{A}$, ki razširja polmero μ.

Rešitev. Left as an exercise to the reader. □

1.5 Lebesgue-Stieltjesove mere

Naloga 1.16

Naj bo E podmnožica $[0,1]$ z Lebesgueovo mero 1. Dokažite, da je E gosta v $[0,1]$.

Rešitev. Recimo, da E ni gosta v E. Tedaj obstaja takšen $a \in [0,1]$ in $\varepsilon > 0$, da je $E \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \emptyset$. Tedaj velja

$$\mu(E) \leq [0,1] \setminus (a-\varepsilon, a+\varepsilon) < 1,$$

kar je protislovje. □

Naloga 1.17

Racionalna števila razvrstimo v zaporedje $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in definiramo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right].$$

Ali je $A = \mathbb{R}$?

Rešitev. Iz

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

sledi $A \neq \mathbb{R}$. □

Enakost $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ je znana tudi kot Baselski problem.

Naloga 1.18

Za poljuben $\varepsilon > 0$ poiščite takšno neprazno gosto podmnožico $E \subset \mathbb{R}$, da velja $m(E) < \varepsilon$.

Rešitev. Iz prejšnje naloge sledi, da je ustrezna množica

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[r_n - \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 n^2}, r_n + \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 n^2}\right].$$ □

Množica A je gosta, saj vsebuje vsa racionalna števila.

Naloga 1.19

Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna funkcija in μ_f njena pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Izračunajte μ_f od $[a,b]$, $\{a\}$, $(a,b]$ in (a,b). Kdaj je $\mu_f(\{a\}) = 0$?

Rešitev. Ker je

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right)$$

presek padajočega zaporedja, je

$$\begin{aligned}
\mu_f(\{a\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu_f\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) \\
&= \lim_{x\downarrow a} f(x) - f(a) \\
&= f(a^+) - f(a).
\end{aligned}$$

Ker je f naraščajoča, limita $f(a^+)$ obstaja. Sledi, da je $\mu_f(\{a\}) = 0$ natanko tedaj, kadar je f zvezna v a.

Dobljeno upoštevamo pri izračunu preostalih mer:

$$\begin{aligned}
\mu_f([a,b]) &= \mu_f([a,b)) + \mu_f(\{b\}) = f(b) - f(a) + f(b^+) - f(b) = f(b^+) - f(a), \\
\mu_f((a,b]) &= \mu_f([a,b]) - \mu_f\{a\} = f(b^+) - f(a) - f(a^+) + f(a) = f(b^+) - f(a^+), \\
\mu_f((a,b)) &= \mu_f([a,b)) - \mu_f\{a\} = f(b) - f(a) - f(a^+) + f(a) = f(b) - f(a^+).
\end{aligned}$$ □

Pomembna opazka je, da imamo opravka s končnimi količinami, torej je odštevanje res dobro definirano.

Naloga 1.20

Realno of opremimo z Lebesgueovo mero m. Naj bo K neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Dokažite naslednji trditvi.

(a) Velja $\mu(K) < \infty$.

(b) Če je $0 < \lambda < m(K)$, potem obstaja taka kompaktna podmnožica L v K, da je $m(L) = \lambda$.

Rešitev. **(a):** Kompaktne podmnožice $\mathbb{R}$ so omejene, torej obstaja takšen $M > 0$, da je $M \subseteq [-M, M]$. Sledi $\mu(K) \leq \mu([-M, M]) = 2M < \infty$.

(b): Naj bo M takšen kot zgoraj in $f\colon [-M, M] \to [0, \infty]$ funkcija, definira z $t \mapsto m([-M, t] \cap K)$. Velja $f(-M) = 0$ in $f(M) = m(K)$. Če je f zvezna, nam izrek o vmesni vrednosti pove, da zavzame vse vrednosti na intervalu $[0, m(K)]$.

Pokažimo, da je f zvezna. Naj bo $\epsilon > 0$ in $t, s \in [-M, M]$, kjer je $t < s$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(t)| &= |m([-M, s] \cap K) - m([-M, t] \cap K)| \\
&= |m(([-M, t] \cap K) \cup ((t, s] \cap K)) - m([-M, t] \cap K)| \\
&= |m([-M, t] \cap K) + m((t, s] \cap K) - m([-M, t] \cap K)| \\
&= m((t, s]) \cap K \\
&\leq s - t.
\end{aligned}$$

Sledi, da je f (Lipshitzevo) zvezna, torej obstaja takšen $t_0 \in [-M, M]$, da je $m([-M, t_0] \cap K) = \lambda$. Množica $L := [M, t_0] \cap K$ je zaprta in omejena, torej je kompaktna. □

2 Integral

2.1 Merljive preslikave

Definicija

Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. Preslikava $f\colon X \to Y$ je *merljiva*, če je praslika vsake merljive množice merljiva.

Če je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem zadošča, da preverimo, da so praslike elementov $\mathcal{F}$ merljive. V posebnem

V posebnem je $f\colon X \to \mathbb{R}$ (Borelovo) merljiva, če je $f^{-1}((-\infty)) \in \mathcal{A}$ za vse $a \in \mathbb{R}$ (ekvivalentno lahko imamo tudi intervale drugačne oblike: $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$).

Velja, da je $f\colon X \to \mathbb{C}$ Borelova natanko tedaj, kadar sta $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ Borelovi.

Preslikava $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ je merljiva natanko tedaj, kadar so merljivi vse praslike intervalov oblike $[-\infty, a]$, tj. $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ za vse $a \in \mathbb{R}$.

Naloga 2.1

Dokažite, da je funkcija $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}; & z \neq 0 \\ 0; & z = 0 \end{cases}$$

Borelovo merljiva.

Rešitev. Prerimo na generatorjih. Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Dokažimo, da je $\operatorname{sgn}^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

- Če $0 \notin U$, potem je sgn zvezna. Torej je $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ odprta in zato merljiva.
- Če je $0 \in U$, potem je $\operatorname{sgn}^{-1}(U) = \{0\} \cup \operatorname{sgn}^{-1}(U \setminus \{0\})$. Množica $\{0\}$ je zaprta, množica $\operatorname{sgn}^{-1}(U \setminus \{0\})$ pa zaprta (zaradi zveznosti), torej sta obe merljivi, kar pomeni, da je merljiva tudi njuna unija. $\square$

Naloga 2.2

Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ trivialna σ-algebra na X. Poiščite vse merljive preslikave $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Rešitev. Recimo, da je $f\colon X \to \mathbb{R}$ merljiva. Ker je X neprazna množica, obstaja $a \in f(X)$, torej je praslika merljive množice $\{a\}$ neprazna merljiva množica, kar pomeni, da je $f^{-1}(a) = X$.

Sledi, da so konstante preslikave edine merljive preslikave iz X v $\mathbb{R}$. $\square$

Naloga 2.3

Dokažite, da lahko vsako kompleksno merljivo funkcijo zapišemo kot linearno kombinacijo štirih nenegativnih merljivih funkcij.

Rešitev. Funkcijo $f\colon X \to \mathbb{C}$ lahko zapišemo kot

$$f = \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = R^+ + R^- + i(I^+ - I^-),$$

kjer je $R^\pm(x) = \max\{0, \pm \operatorname{Re} f(x)\}$ in podobno $I^\pm \max\{0, \pm \operatorname{Im} f(x)\}$.

Velja

$$\mathbb{R}^+ = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Re}(f) + |\operatorname{Re}(f)|\right),$$

Ker je Re merljiva in $|\cdot|$ zvezna, je $\mathbb{R}^+$ merljiva. Podobno velja za R^-, I^+ in I^i. □

Zgoraj smo upoštevali tudi, da so linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednostmi v $\mathbb{R}$ *ali* $\mathbb{C}$ *merljive.*

Naloga 2.4

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ poln merljiv prostor in $g\colon X \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Recimo, da funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ enaka funkciji g skoraj povsod. Dokažite, da je f merljiva.

Rešitev. Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ odprta množica in $B = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, kjer vemo, da je $\mu(B) = 0$. Zapišemo lahko

$$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap B) \cup (f^{-1}(U) \setminus B).$$

Pokažimo, da imamo unijo dveh merljivih množic.

- Za množico $f^{-1}(U) \cap B$ velja $\mu(f^{-1}(U) \cap B) \leq \mu(B) = 0$. Torej je $f^{-1}(U) \cap B$ merljiva, saj je X poln merljiv prostor.
- Množica $f^{-1}(U) \setminus B$ je presek dveh merljivih množic:

$$f^{-1}(U) \setminus B = \{x \in X \mid f(x) = g(x) \in U\} = g^{-1}(U) \cap B^c.$$

Torej je $f^{-1}(U)$ merljiva. □

Naloga 2.5

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcija.

(a) Naj ima f števno zalogo vrednosti. Pokažite, da je f merljiva natanko tedaj, kadar ja za vsak $x \in \mathbb{R}$ množica $f^{-1}(x)$ merljiva v X.

(b) Naj ima X kardinalnost kontinuuma. Poišči primer σ-algebre na X in nemerljive funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$, za katero je množica $f^{-1}(x)$ merljiva za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Rešitev. **(a):** ($\Rightarrow$): Singletoni so zaprti, zato je $f^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$): Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ odprta množica. Tedaj je

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{U \cap f(X)}_{\text{števna}}) = f^{-1}\left(\bigcup_{y \in U \cap f(X)} \{y\}\right) = \bigcup_{y \in U \cap f(X)} f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A},$$

saj imamo števno unijo merljivih množic $f^{-1}(\{y\})$.

(b): Naj bo

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X \mid E \text{ je števna ali } E^c \text{ je števna}\}.$$

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da je to res σ-algebra. Naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ bijektivna funkcija. Tedaj so praslike singletonov singletoni, po drugi strani pa $f^{-1}([0,1])$ ni števna, niti ni števen njen komplement, torej ni merljiva. $\square$

Produktna σ-algebra

Definicija

Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. *Produktna σ-algebra* na $X \times Y$ je najmanjša σ-algebra, za katero sta projekciji $p\colon X \times Y \to X$ in $q\colon X \times Y \to Y$ merljivi.

Generirana je z merljivi pravokotniki:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Če je $A = \sigma(\mathcal{F})$ in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$, potem je

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \sigma\left(\{F \times Y \mid Y \in \mathcal{F}\} \cup \{X \times G \mid G \in \mathcal{G}\}\right).$$

Naloga 2.6

Naj bodo $(X_j, \mathcal{A}_j)$, kjer je $1 \leq j \leq n$, merljivi prostori in $f_j\colon X_j \to \mathbb{R}$ merljive preslikave. Dokažite, da je preslikava $F\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

merljiva gleda na produktno σ-algebro $\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$.

Rešitev. Naj bo $g_j\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ definirana z predpisom $g_j = f_j \circ \pi_j$, kjer je π_j projekcija na j-to komponento. Ker je g_j kompozitum merljivih preslikav, je merljiv. Tedaj je

$$f = \prod_{j=1}^{n} g_j$$

produkt merljivih funkcij, torej je f merljiva. $\square$

Literatura

[1] Marko Kandić. *Naloge iz teorije mere*. 2015.