Ramseyeva teorija

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

16. oktober 2024

Uvod

Zapiski so kot spremljevalno gradivo namenjeni srečanju matematičnega krožka na Gimnaziji Bežigrad, ki sem ga vodil 16. oktobra 2024.

Glavni cilj je spoznati nekaj osnovnih pojmov in rezultatov iz Ramseyeve teorije skozi reševanje nalog, ki so po obsegu in težavnosti primerne za srednješolce, ki se pripravljajo na matematična tekmovanja.

Bralcu priporočam, da najprej vsako nalogo poskusi rešiti sam, šele nato pa prebere rešitev. V primeru morebitnih vprašanj ali popravkov me lahko kontaktirate.

Kazalo

1 Ramseyeva števila

Ramseyeva teorija govori o particijah velikih struktur. Tipičen rezultat nam pove, da se mora v neki particiji dovolj velike strukture pojaviti neka specifična podstruktura. Na primer, če povezave dovolj velikega polnega grafa pobarvamo z nekaj barvami, mora nujno obstajati monokromatičen trikotnik (v tem primeru imamo particijo povezav na različne barve, osnovna struktura so povezave grafa, iskana podstruktura pa monokromatičen trikotnik).

Da zgornje res drži, nam zagotovi Ramseyev izrek, ki je nekakšna "večdimenzionalna" posplošitev Dirichletovega principa, ki tudi sam preučuje particije struktur (na primer razdelitev golobov v golobnjake).

Bolj filozofsko, Ramseyeva teorija nas nauči, da ne gleda na to, kako kaotičen je nek sistem, bodo znotraj sistema vedno obstajali urejeni deli.

Naloga 1.1

Dokažite, da med poljubnimi šestimi ljudmi vedno obstajajo trije, ki se med seboj poznajo, ali trije, ki se med seboj ne poznajo.

Rešitev. Poglejmo enega izmed teh ljudi. Brez škode za splošnost po Dirichletovem principu med ostalimi petimi obstajajo trije, ki jih pozna. Če se poljubna dva med temi tremi poznata, imamo tri ljudi, ki se med seboj poznajo. Sicer se ti trije med seboj ne poznajo, kar prav tako zaključi dokaz. □

Zgornja naloga je eden izmed enostavnejših rezultatov Ramseyeve teorije, vendar v nadaljevanju, za lažje razumevanje, izjave raje formuliramo v jeziku teorije grafov in ne socialne interakcije.

Kot zanimivost lahko omenimo, da se Ramsey[1] v resnici ni ukvarjal niti z grafi niti s socialnimi interakcijami, temveč z logiko. Izrek, po katerem je najbolj znan, je dokazal kot manjšo lemo na poti k popolnoma drugačnim rezultatom. Večina zgodnjega razvoja Ramseyeve teorije se je zgodila šele po njegovi smrti pri ranih 26-tih letih. Za zgodnji razvoj je med drugimi v veliki meri zaslužen eden najznamenitejših matematikov 20. stoletja Paul Erdős.

Izrek 1.2: Ramsey

Za poljubni naravni števili r in s obstaja najmanjše takšno naravno število $n = R(r, s)$, da velja naslednje: Če povezave polnega grafa K_n pobarvamo z dvema barvama, zagotovo obstaja poln podgraf moči r, v katerem so vse povezave prve barve ali pa poln podgraf moči s, v katerem so vse povezave druge barve.

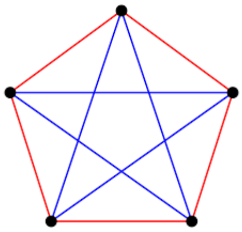
Številu $R(r, s)$ pravimo *Ramseyevo število*. Alternativna formulacija zgornjega izreka bi bila, da vsak graf na n točkah vsebuje bodisi kliko moči r bodisi antikliko moči s. Dokaz izreka zaenkrat izpustimo, kasneje dokažemo splošnejšo obliko.

[1] Frank P. Ramsey (1903-1930)

Naloga 1.3

Določite $R(3,3)$ in $R(3,4)$.

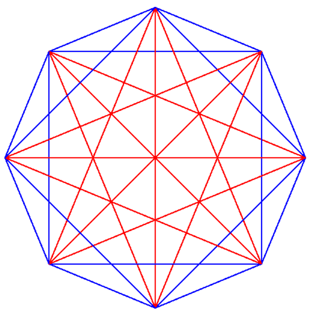
Rešitev. Pokazali smo že, da velja $R(3,3) \leq 6$ (ljudi predstavimo z vozlišči, poznanstva pa z barvo povezave). Za dokaz spodnje meje si poglejmo sliko 1.



Slika 1: Barvanje K_5 z dvema barvama.

Opazimo, da barvanje nima monokromatičnega trikotnika, torej $R(3,3) > 5$. Skupaj smo dokazali $R(3,3) = 6$.

Slika 2 prikazuje barvanje K_8 z rdečo in modro barvo, ki nima rdečih trikotnikov in nima modrih klik velikosti 4. Sledi $R(3,4) > 8$.



Slika 2: Barvanje K_8 z dvema barvama.

Pokažimo, da velja $R(3,4) = 9$. Recimo, da imamo barvanje K_9 z rdečo in modro barvo, ki ne vsebuje rdečega trikotnika in ne vsebuje modre klike moči 4. Poglejmo si neko vozlišče v_0.

- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj šestih modrih povezavah. Zaradi prejšnjega dela naloge lahko med temi šestimi vozlišči najdemo tri vozlišča, ki tvorijo moder trikotnik. Skupaj z vozliščem v_0 tedaj tvorijo modro kliko moči 4.

- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj štirih rdečih povezavah. Če med temi štirimi vozlišči (ki so z v_0 povezana z rdečo povezavo) ni nobene rdeče povezave, tvorijo modro kliko moči 4. Če obstajata med njimi vozlišči, ki sta povezani z rdečo povezavo, tedaj skupaj z v_0 tvorita rdeč trikotnik.

Edina preostala možnost je, da je vsako vozlišče vsebovano v natanko treh rdečih povezavah. V tem primeru podgraf, vpet[2] na rdečih povezavah, krši lemo o rokovanju. □

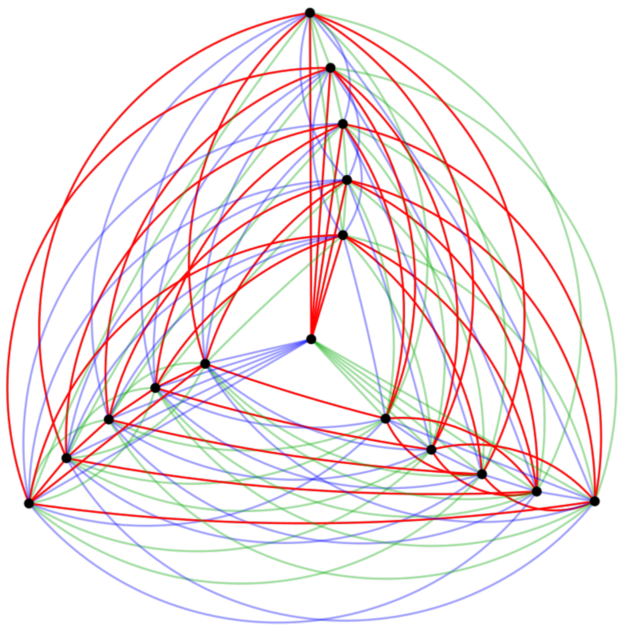
Eden izmed načinov, kako posplošiti Ramseyev izrek, je, da dodamo več barv. Primer tega je naslednja naloga.

Naloga 1.4: IMO 1964/4

Dokažite, da velja $R(3,3,3) \leq 17$.

Rešitev. Poglejmo vozlišče v_0. Brez škode za splošnost je vsebovano v vsaj šestih povezavah rdeče barve. Če je med temi šestimi vozlišči kakšna povezava rdeče barve, smo končali, sicer pa upoštevamo $R(3,3) = 6$. □

Izkaže se, da velja enakost, torej $R(3,3,3) = 17$. Še več, obstajata natanko dve neizomorfni barvanji grafa K_{16}, ki ne vsebujeta monokromatičnega trikotnika. Slika 3 prikazuje enega od njiju.



Slika 3: Barvanje K_{16} s tremi barvanji, ki ne vsebuje monokromatičnega trikotnika.

Bolj splošno, z nekaj znanja analize bi lahko pokazali sledečo trditev.

[2]Podgraf H grafa G je *vpet* podgraf, če ima enaka vozlišča kot G.

Trditev 1.5

Naj bo $k \geq 2$ celo število. Tedaj velja

$$R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k\text{-krat}}) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1.$$

V primeru $k = 3$ nam trditev da natančno zgornjo mejo

$$R(3, 3, 3) \leq \lfloor e \cdot 3! \rfloor + 1 = \lfloor 16{,}31 \rfloor + 1 = 17.$$

Naloga 1.6: IMO 1978/6

Elemente množice $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ pobarvamo s šestimi barvami. Dokažite, da obstajajo števila $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, 1978\}$, ki so iste barve in za njih velja $x + y = z$.

Rešitev. Nalogo je mogoče rešiti s osnovnimi strategijami. To rešitev prepustimo bralcu, tukaj pa predstavimo rešitev s pomočjo prejšnje trditve.

Naj bo množica $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ pobarvana s seštimi barvami. Torej imamo particijo

$$\{1, 2, \ldots, 1978\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cap S_5 \cap S_6,$$

kjer S_i vsebuje tiste elemente, ki so pobarvani z i-to barvo.

Konstruirajmo poln graf G na 1979 vozliščih, ki jih označimo z $1, 2, \ldots, 1979$. Naj bo povezava, ki vsebuje i in j takšne barve r, da velja $|i - j| \in S_r$.

Ker velja $1979 > \lfloor e \cdot 6! \rfloor + 1 = 1958$, graf G vsebuje monokromatičen trikotnik. Torej obstajajo $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 1979\}$, za katere velja, da so $|i - j|$, $|j - k|$ in $|k - i|$ iste barve. Brez škode za splošnost naj bo $i > j > k$. Naj bo $x = |i - j|$, $y = |j - k|$ in $z = k - i$. Res velja

$$x + y = i - j + j - k = |k - i| = z. \qquad \square$$

Naloga je tesno povezana s Schurovim izrekom.

Izrek 1.7: Schur

Dokažite, da za vsako naravno število k obstaja naravno število n, da za vsako k-barvanje elementov množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ obstajajo števila x, y, z iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ iste barve z lastnostjo $x + y = z$.

Dodatne naloge

1. Povezave grafa K_n pobarvamo z dvema barvama. Dokažite, da dobimo vsaj

$$\binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$$

monokromatičnih trikotnikov.

2. Dokažite Schurov izrek.

3. Naj bo m naravno število. Dokažite, da ima za dovolj velik n vsaka 0/1 matrika velikosti $n \times n$ glavno podmatriko velikosti m, pri kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki in vsi elementi pod diagonalo enaki. *Glavna podmatrika* je podmatrika, ki jo določa m vrstic in m istoležečih stolpcev.

2 Grafovska Ramseyeva števila

Definicija 2.1

Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ enostavni grafi. *Grafovsko Ramseyevo število* $R(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ je najmanjše naravno število n, za katerega velja, da vsako barvanje s k barvami povezav K_n vsebuje G_i barve i za nek i.

Naloga 2.2

Določite $R(P_4, P_4)$ in $R(P_4, C_4)$.

Opomba o oznakah: P_n označuje pot na n vozliščih, C_n pa cikel na n vozliščih.

Rešitev. Poglejmo sledeče barvanje kvadrata. En trikotnik pobarvamo rdeče, ostale povezave pa modro. Tako barvanje ne vsebuje niti P_4 modre barve, niti P_4 zelene barve, niti C_4 zelene barve. Sledi $N(P_4, P_4) > 4$ in $N(P_4, C_4) > 4$.

Pokažimo, da je $N(P_4, P_4) \leq 5$. Naj bo v_0 vozlišče. Brez škode za splošnost je vsebovano v vsaj dveh povezavah modre barve. Naj bosta to v_0v_1 in v_0v_2. Če je katera od povezav $v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4$ modra, imamo P_4 modre barve. Sicer imamo P_4 rdeče barve.

Pokažimo, da je $N(P_4, C_4) \leq 5$. Naj bodo $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vozlišča.

- Recimo, da je v_0 v vsaj dveh povezavah modre barve – v_0v_1 in v_0v_2. Če je katera od povezav $v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4$ modra, imamo P_4 modre barve. Sicer imamo rdeč C_4.
- Recimo, da je v_0 v vsaj treh povezavah rdeče barve. Naj bodo to v_0v_1, v_0v_2 in v_0v_3. Če sta vsaj dve povezavi med v_1, v_2 in v_3 rdeči, imamo rdeč C_4. Recimo, da je kvečjemu ena rdeča in brez škode za splošnost v_1v_2 in v_2v_3 modri. Če je v_1v_4 ali v_1v_4 modra, imamo moder P_4, sicer pa imamo rdeč C_4.

Dokazali smo, da velja $R(P_4, C_4) = R(P_4, P_4) = 5$. □

Opomba: Zgoraj bi lahko tudi izpustili dokaz, da je $N(P_4, P_4) \leq 5$. To namreč sledi iz $N(P_4, C_4)$, saj je graf P_4 vpet v grafu C_4.

Naloga 2.3: Chvátal [1977]

Naj bo T drevo na m vozliščih. Dokažite, da je $R(T, K_n) = (m-1)(n-1) + 1$.

Rešitev. Za dokaz spodnje meje pobarvamo graf $K_{(m-1)(n-1)}$ tako, da bo rdeč del enak $(n-1)K_{m-1}$ (torej imamo $n-1$ disjunktnih rdečih grafov K_{m-1}). Rdeče povezane komponente bodo tedaj velikosti $m-1$, torej graf ne vsebuje rdečega drevesa velikosti m. Poln moder podgraf lahko vsebuje kvečjemu eno povezavo iz vsakega disjunktnega K_{m-1}, torej je velikosti kvečjemu $n-1$.

Zgornjo mejo dokažemo z indukcijo na n, pri čemer si pomagamo z naslednjo znano lemo.

Lema

Naj bo $m \geq 2$. Če je H graf z minimalno stopnjo vsaj $m-1$, potem vsebuje vsako drevo na m vozliščih.

Dokaz. Lemo dokažemo s pomočjo indukcije na m. V primeru $m = 2$ je pogoj izpolnjen. Naj bo T drevo na $m > 2$ vozliščih in predpostavimo, da lema velja za $m-1$. Naj bo H graf z minimalno stopnjo vsaj $m-1$ in T drevo na m vozliščih. Naj bo v list drevesa. Tedaj H vsebuje $S = T - u$. Velja $|S| = m-1$, torej je vsako vozlišče $v \in S$ povezano s kakšnim vozliščem, ki ni vsebovano v S. Posledično lahko priključimo takšno vozlišče, da dobimo T. □

Naj bo $n = 1$. Potem za moder K_1 ne potrebujemo nobene povezave in je pogoj izpolnjen. Naj bo sedaj $n > 1$. Predpostavimo, da pogoj naloge velja za $n-1$. Recimo, da imamo neko 2-barvanje povezav grafa $K_{(m-1)(n-1)+1}$.

- Naj bo v poljubno vozlišče. Če ima v več kot $(m-1)(n-2)$ modrih povezav, potem med temi sosedi po indukcijski predpostavki obstaja bodisi rdeč T bodisi moder K_{n-1}. V slednjem primeru skupaj z vozliščem v dobimo K_n, sicer pa že imamo rdeč T.

- Recimo, da ima vsako vozlišče kvečjemu $(m-1)(n-2)$ modrih povezav in posledično vsaj $m-1$ rdečih povezav. V tem primeru nam zgornja lema zagotovi rdeč T. Pri tem moramo paziti samo na primer $m = 1$, vendar v tem primeru ponovno ne potrebujemo nobene povezave, da je pogoj izpolnjen.

Zagotovo se bo zgodila ena od teh dveh možnosti, torej smo končali. □

Dodatne naloge

1. Določite $R(P_n, P_3)$ in $R(P_n, P_4)$.

2. Naj bodo povezave grafa K_5 pobarvane z rdečo in modro barvo tako, da ni nobenega monokromatičnega trikotnika. Dokažite, da povezave rdeče barve sestavljajo cikel dolžine 5 in povezave modre barve sestavljajo cikel dolžine 5.

3. Dokažite, da je $R(2K_3, K_3) = 8$.

4. Dokažite, da za vsako naravno število m obstaja takšno naravno število n, da vsak seznam n realnih števil vsebuje monoton podseznam dolžine m.

3 Posplošitev Ramseyevega izreka

Izrek 3.1: Ramsey

Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja najmanjše takšno naravno število $N(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: Če v množici S moči $n \geq N(a_1, a_2; r)$ vse r-podmnožice pobarvamo z barvo 1 ali 2, potem obstaja takšna a_1-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa obstaja takšna a_2-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 2.

Dokaz. Uporabimo dvojno indukcijo, po r in še po $a_1 + a_2$. V primeru $r = 1$ velja $N(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$. Recimo, da je $a_1 \geq a_2$. Potem je $N(a_1, a_2; a_2) = a_1$. Sedaj predpostavimo, da izrek velja za $r - 1$ in ga dokažimo za r. Naj bo

$$\begin{aligned} a'_1 &:= N(a_1 - 1, a_2; r), \\ a'_2 &:= N(a_1, a_2 - 1; 4). \end{aligned}$$

Naj bo S množica moči več kot $N(a'_1, a'_2; r-1)+1$. Vse podmnožice S pobarvamo z barvo 1 ali barvo 2. Naj bo $a \in S$ in $S' := S \setminus \{a\}$. Barvanje S' je usklajeno z barvanjem S tako, da je barva $X \subseteq S'$ enaka barvi $X \cap \{a\}$ v S.

Ker velja $|S'| \geq N(a'_1, a'_2; r-1)$, brez škode za splošnost obstaja a'_1-podmnožica A množice S', v kateri so vse $(r-1)$-podmnožice barve 1. Velja $|A| = a' = N(a_1 - 1, a_2; r)$. Sedaj ločimo dva primera.

- Recimo, da v A obstaja a_2-podmnožica, v kateri so vse r-podmnožice barve 2.
- Recimo, da v A obstaja $(a_1 - 1)$-podmnožica A', v kateri so vse r-podmnožice barve 1. Tedaj definiramo
  $$A'' := A' \cap \{a\}\,.$$
  Velja $|A''| = a_1$. Ker je barvanje $S' \supseteq A'$ usklajeno z barvanjem $S \supseteq A$, so vse r podmnožice v A'' barve 1.

V obeh primerih smo izpolnili zahtevan pogoj, torej izrek velja tudi za r. $\square$

Direktno iz dokaza izreka sledi

$$R(a_1, a_2; r) \leq N(N(a_1 - 1, a_2; r), N(a_1, a_2 - 1; r); r - 1) + 1. \tag{$\spadesuit$}$$

Naloga 3.2

Naj bosta $a_1, a_2 \geq 2$. Dokažite

$$N(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo. Velja

$$N(a_1, 2; 2) = a_1 = \binom{a_1 + 2 - 2}{a_1 - 1}$$

in podobno za $N(2, a_2; 2)$.

Za dokaz indukcijskega koraka upoštevamo še $N(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$ in dobimo

$$\begin{aligned} N(a_1, a_2; 2) &\overset{(\spadesuit)}{\leq} N(N(a_1 - 1, a_2; 2), N(a_1, a_2 - 1; 2); 1) + 1 \\ &= (N(a_1 - 1, a_2; 2) + N(a_1, a_2 - 1; 2) - 1) + 1 \\ &\overset{\text{IP}}{\leq} \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 2} + \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 1} \\ &= \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}. \end{aligned}$$

□

Naloga 3.3: Erdős-Szekeres [1935]

Dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tako število $N(n)$, da velja: Če imamo v ravnini $N \geq N(n)$ točk v splošni legi, potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.

Rešitev. Najprej dokažimo naslednjo geometrijsko lemo.

Lema

Množica n točk v ravnini tvori konveksen n-kotnik natanko tedaj, kadar vsaka podmnožica štirih točk tvori konveksen 4-kotnik.

Dokaz. Poglejmo konveksno ogrinjačo točk. Če točke tvorijo konveksen n-kotnik, potem vsake štiri tvorijo konveksen štirikotnik. Nasprotno, recimo, da točke ne tvorijo konveksnega n-kotnika. Potem obstaja točka znotraj ogrinjače. Če ogrinjačo trianguliramo, bo ta točka znotraj nekega trikotnika in skupaj z oglišči trikotnika ne bo tvorila konveksnega 4-kotnika. □

Naj bo $N \geq N(n) := R(n, n; 3)$. Točke označimo z $1, 2, \ldots, N$. Poglejmo poljuben trikotnik in njegova oglišča označimo z i, j, k tako, da $i < j < k$. Če je trikotnik IJK pozitivno orientiran, ga pobarvamo s prvo barvo, sicer z drugo.

Ker je $N \geq N(n, n; 3)$, brez škode za splošnost obstaja n-podmnožica, v kateri so vsi trikotniki prve barve. Dokažimo, da ta množica tvori konveksen n-kotnik. Predpostavimo nasportno in uporabimo lemo. Torej obstajajo štiri točke, ki ne tvorijo konveksnega štirikotnika. Če pogledamo orientacije trikotnikov na teh štirih vozliščih, pridemo do protislovja s tem, da so vsi trikotniki iste barve. □

A O računski zahtevnosti

Iskanje točnih vrednosti Ramseyevih števil hitro postane zelo zahtevno in nedosegljivo današnji tehnologiji. Tabela 1 prikazuje trenutne znane vrednosti in meje za Ramseyeva števila $R(r,s)$.

$R(r,s)$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-41
4		18	25	36-40	49-58	59-79	73-105	92-135
5			43-46	59-85	80-133	101-193	133-282	149-381

Tabela 1: Znane vrednosti/meje za Ramseyeva števila $R(r,s)$.

Najnovejša sprememba v zgornji tabeli se je zgodila decembra lani (leta 2023), ko je bil objavljen članek, v katerem je pokazano $R(3,10) \leq 41$. Zainteresiranemu bralcu je tu dostopen članek, ki govori o tem rezultatu.

Vidimo, da je v resnici znanih zelo malo Ramseyevih števil. Če želimo dokazati, da je $R(s,t) = N$, moramo najti ustrezno barvanje povezav grafa K_{N-1} in pokazati, da vsa barvanja povezav grafa K_N ustrezajo nekemu pogoju. V teoriji bi lahko uporabili računalnik in preverili vsa možna barvanja za zaporedne n, dokler ne najdemo prvega N, pri katerem vsako barvanje zadošča zahtevanemu pogoju. Že v primeru dveh barv postane število barvanj zelo hitro nepredstavljivo veliko. V primeru, ko imamo več kot dve barvi ali pa v primeru $R(s,t;r)$, kjer $r > 2$, je znanega še veliko manj.

Zahtevnost iskanja lepo opiše naslednja znamenita misel.

> *"Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens."*
>
> – Joel Spencer

B Dva pomembna izreka Ramseyeve teorije

Za konec kot zanimivost navedimo še dva pomembna izreka Ramseyeve teorije.

Izrek B.1: Van der Waerden

Za poljubni števili c in n obstaja število V, za katerega velja, da, če V zaporednih števil pobarvamo s c različnimi barvami, potem je med njimi vsaj n števil iste barve, ki so v aritmetičnem zaporedju.

Najmanjše tako število označimo z $W(r, k)$ in ga imenujemo *Van der Waerdenovo število*. Tako kot pri Ramseyevih številih, je tudi problem iskanja teh števil zelo zahteven.

Izrek B.2: Hales-Jewett

Za vsaki števili n in c obstaja število H, za katerega velja, da, če celice H-dimenzionalne $n \times n \cdots \times n$ kocke pobarvamo s c barvami, potem obstaja stolpec, vrstica, ... dolžine n z vsemi celicami iste barve.

Alternativno: Igra "n v vrsto" se ne more končati brez zmagovalca, ne glede na to, koliko ljudi igra, in ne glede na to kako velik je n, če igramo na dovolj dimenzionalni igralni "deski".

Hales-Jewettov izrek je posplošitev Van der Waerdenovega izreka.

Literatura

[1] V. Chvátal. »Tree-complete graph ramsey numbers«. V: *Journal of Graph Theory* 1.1 (1977), str. 93–93. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.3190010118.

[2] Ben Green. »Ramsey Theory and the IMO«. V: *The Mathematical Gazette* 86.506 (2002), str. 204–207. ISSN: 00255572. URL: http://www.jstor.org/stable/3621841 (pridobljeno 14. 10. 2024).

[3] Martin Juvan in Primož Potočnik. *Teorija grafov in kombinatorika*. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva. DMFA - založništvo, 2007. ISBN: 978-961-212-105-1.

[4] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Second. Prentice Hall, 2001. ISBN: 91-7808-830-4.