Invariante in dvojno štetje

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

13. februar 2023

1 Barvanja

1. Ali lahko tabelo velikosti 8×8, ki ji odstranimo polji v diagonalno nasprotnih kotih, pokrijemo z dominami velikosti 1×2?

2. Ali lahko tabelo velikosti 8×8 pokrijemo s petnajstimi 1×4 pravokotniki in enim 2×2 kvadratom?

3. Tabela velikosti 5×5 je pokrita z osmimi 1×3 pravokotniki in enim 1×1 kvadratom. V katerih poljih je lahko kvadrat?

4. Za katera števila $n \in \mathbb{N}$ lahko tabelo velikosti $n \times n$ pokrijemo s tetranominami oblike L, če tabeli najprej odstranimo polje v vseh štirih kotih?

5. Na 9×9 tabeli je 65 hroščev. Vsako minuto se vsak hrošč premakne v eno od sosednjih polj. Vsak hrošč se izmenično premika enkrat horizontalno in enkrat vertikalno.

   Torej, lahko se na primer premakne $\leftarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow$, *vendar ne* $\leftarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$.

   Dokažite, da se bo zagotovo zgodilo, da sta dva hrošča na istem polju.

6. (IMO 2018/4) Položaj je vsaka točka (x, y) v ravnini, za katero sta x in y naravni števili manjši ali enaki 20.

   Na začetku je vseh 400 položajev nezasedenih. Ana in Bor izmenično polagata kamne na položaje, pri čemer prvi kamen položi Ana. Ko je Ana na vrsti, položi nov rdeč kamen na nezasedeni položaj tako, da je razdalja med katerimakoli položajema, zasedenima z rdečima kamnoma, različna od $\sqrt{5}$. Ko je Bor na vrsti, položi nov moder kamen na katerikoli nezasedeni položaj. (Položaj, na katerem je moder kamen, je lahko na katerikoli razdalji od kateregakoli zasedenega položaja.) Ana in Bor prenehata polagati kamne takoj, ko katerikoli od njiju ne more položiti kamna.

   Poišči največje število K, tako da lahko Ana zagotovo položi vsaj K rdečih kamnov, ne glede na to, kako polaga kamne Bor.

2 Invariante in monovariante

1. Na tabli so napisana števila $1, \ldots, 2023$. Obravnavaj sledeči situaciji:

   (a) V vsakem koraku izberemo dve števili, a in b, in ju zamenjamo z $a+b$. Po 2022 potezah bo na tabli samo še eno število. Katero?

   (b) V vsakem koraku izberemo dve števili, a in b, in ju zamenjamo z $|a-b|$. Ali se lahko zgodi, da je 21 edino število na tabli?

2. Krog razdelimo na šest krožnih izsekov in vanje zaporedoma v smeri urinega kazalca napišemo števila 1, 0, 1, 0, 0 in 0. V potezi lahko številoma v poljubnih dveh sosednjih izsekih prištejemo neko celo število. Ali lahko z zaporedjem takšnih potez izenačimo števila v vseh sektorjih?

3. V ravnini ležijo trije paki. Hokejist udari enega izmed pakov tako, da v ravni črti zdrsi skozi preostala dva. Ali so lahko po 2023 udarcih vsi paki v enakem položaju kot na začetku?

4. Šahovnica je pobarvana na standarden način. V potezi lahko izberemo katerokoli vrstico, stolpec ali 2×2 podtabelo in v izbranem območju zamenjamo barvi (torej bela polja spremenimo v črna, črna pa v bela). Ali lahko pridemo v situacijo, ko imamo 63 belih polj in 1 črno polje?

5. Dinozaver se premika po koordinatnem sistemu. Iz točke (x, y) se lahko premakne v katerokoli od točk (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x+1, y+4)$ in $(x-1, y-4)$. Recimo, da začne v $(0, 1)$. Dokažite, da nikoli ne bo v $(0, 0)$.

6. Na tabli imamo števila od 1 do 1000. Vsako število zamenjamo z vsoto njegovih števk, dokler ne dobimo enomestnega števila. Na koncu imamo na tabli torej 1000 enomestnih števil. Katero število je napisano največkrat?

7. Vsako od števil $a_1, \ldots, a_n$ je enako 1 ali -1. Recimo, da velja:

   $$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

   Dokažite, da $4 \mid n$.

8. Na tabli so napisana števila $1, 2, \ldots, n$ v tem vrstnem redu. Števila $1, 2, \ldots, n$ so v tem vrstnem redu napisana na tablo. V vsakem koraku lahko zamenjamo mesti poljubnih dveh števil. Dokažite, da se ne moremo vrniti v prvotno stanje po lihem številu zamenjav.

9. Na začetku je v $n \times n$ tabeli $n-1$ okuženih polj. Vsako sekundo se okuži vsako polje, ki je sosednje vsaj dvema okuženima poljema. Koliko polj bo okuženih v najslabšem primeru?

10. Na celoštevilski premici leži nekaj kamnov. Če se na istem mestu nahajata 2 kamna, ju lahko premaknemo, enega na prejšnje mesto in enega na naslednje. Ali se je po prvi potezi še možno vrniti na začetno pozicijo?

11. Na začetku so štirje žetoni v točki $(0,0)$. V vsakem koraku lahko odstranimo en žeton iz točke (a,b) in ga nadomestimo z dvema žetonoma. Enega postavimo v točko $(a+1,b)$ in drugega v točko $(a,b+1)$. Dokažite, da bo po končnem številu korakov vedno obstajala točka z vsaj dvema žetonoma.

12. Na zabavo je povabljenih $2n$ diplomatov. Vsak diplomat ima kvečjemu $n-1$ sovražnikov. Dokažite, da lahko diplomate posedemo okoli okrogle mize tako, da nihče ne sedi poleg svojega sovražnika.

13. (Izbirni test) Dana je tabela velikosti $2n \times 2n$. V vsakem polju je napisana neka potenca števila 2 z nenegativnim celoštevilskim eksponentom. Na začetku so vsa števila različna. V vsakem koraku izvedemo eno izmed naslednjih potez:

    (a) Izberemo poljubni dve sosednji polji ter poljubno naravno število k in obema poljema prištejemo k.

    (b) Zamenjamo števili v dveh poljih, ki ležita simetrično čez središče tabele.

    Ali je možno, da bo po končnem številu korakov v vseh poljih tabele zapisano isto število?

14. (ISL 2012 C1) Nekaj pozitivnih celih števil je napisanih v vrsti. V vsakem koraku izberemo dve sosednji števili x in y, kjer je $x > y$ in x je na levi od y, in zamenjamo par (x,y) z $(y+1,x)$ ali $(x-1,x)$. Dokažite, da lahko to naredimo samo končno mnogokrat.

3 Dvojno štetje

Z načelom dvojnega štetja dokažemo, da sta dva izraza enaka. To storimo tako, da pokažemo, da oba preštejeta isto količino oziroma oba preštejeta elemente iste množice.

1. (Lema o rokovanju) Na zabavi je nekaj ljudi, nekateri se med sabo rokujejo. Dokaži, da se je sodo število ljudi rokovalo z lihim številom ljudi.

2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokažite
$$\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

3. Naj bosta $n, k \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n$. Dokažite
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

4. Dokažite
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

5. Dokažite
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{d}.$$

6. Naj bo $p_n(k)$ število permutacij množice $\{1, \ldots, n\}$ z natanko k fiksnimi točkami. Dokažite
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

7. Na matematičnem tekmovanju je sodelovalo 200 tekmovalcev. Rešiti so morali 6 nalog. Vemo, da je vsako nalogo pravilno rešilo vsaj 120 tekmovalcev. Dokažite, da obstajata dva tekmovalca, ki sta skupaj rešila vseh 6 nalog.

8. (ISL 2004 C1). Na univerzi je 10001 študent. Nekateri študenti se pridružijo raznim klubom (študent je lahko član več klubov). Nekateri klubi se združijo v organizacije (klub lahko pripada več organizacijam). Skupaj je k organizacij. Recimo, da velja sledeče:

   - Vsak par študentov je v natanko enem klubu.
   - Za vsakega študenta in vsako organizacijo velja, da je študent v natanko enem klubu organizacije.
   - Vsak klub ima liho mnogo študentov. Dodatno, klub z $2m + 1$ študenti (kjer je m naravno število) je v natanko m organizacijah.

   Poiščite vse možne vrednosti k.

4 Dodatne naloge iz dvojnega štetja

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokažite
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$
kjer je φ Eulerjeva funkcija.

2. *Stirlingovo število prve vrste* $c(n,k)$ je število permutacij velikosti n s k cikli. Dokažite
$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k).$$

3. *Razdelitev končne množice* A je množica nepraznih disjunktnih množic, katerih unija je A. Z drugimi besedami, razdelitev je $\{B_1, \ldots, B_k\}$, kjer je $B_i \neq \emptyset, B_i \cap B_j = \emptyset$ in $\cup_{i=1}^{k} B_i = A$. Vrstni red podmnožic pri tem ni pomemben. Množice $B_1, \ldots, B_k$ imenujemo *bloki razdelitve*.

   Stirlingovo število druge vrste $S(n,k)$ je število razdelitev množice $\{1, \ldots, n\}$ s k bloki. Dokažite
$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

4. *Bellovo število* $B(n)$ je število vseh razdelitev množice $\{1, \ldots, n\}$. Dokažite
$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

5. *Lahovo število* $L(n,k)$ je število razdelitev množice $\{1, \ldots, n\}$ na k linearno urejenih blokov.

   Opomba: Bloki so torej linearno urejeni, njihov vrstni red je še vedno nepomemben: 12–34, 34–12 predstavljata isto razdelitev množice $\{1,2,3,4\}$; 12–34, 21-34 pa ne.

   Dokažite
$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k)L(n-1,k).$$

6. Naj bo S množica n oseb, pri čemer velja naslednje:

   - Vsaka oseba pozna natanko k drugih oseb.
   - Vsaki 2 osebi, ki se poznata, imata natanko l skupnih znancev.
   - Vsaki 2 osebi, ki se ne poznata, imata natanko m skupnih znancev.

   Dokažite
$$m(n-k) - k(k-l) + k - m = 0.$$

5 The Windmill Problem

Za zaključek navajam znamenit problem, ki se je pojavil na IMO leta 2011. Predlagam, da nalogi posvetite nekaj časa, s pravo idejo je namreč bistveno lažja, kot se morda zdi na prvi pogled. Na koncu si lahko pogledate tudi video rešitev.

Naloga: The Windmill Problem: IMO 2011/2

Naj bo S končna množica vsaj dveh točk v ravnini. Denimo, da nobene tri točke iz S niso kolinearne. Z izrazom *mlin na veter* poimenujemo postopek, pri katerem na začetku izberemo premico l, ki gre skozi točko $P \in S$, in na kateri ne leži nobena druga točka iz S. Premica se vrti v smeri urnega kazalca okrog *središča vrtenja* P vse do takrat, dokler premica prvič ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta točka, ki jo označimo s Q, nato postane novo središče vrtenja in premica se sedaj vrti v smeri urnega kazalca okrog Q vse do takrat, dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta postopek se nikoli ne konča, središče vrtenja je vedno točka iz S. Pokaži, da lahko vedno izberemo točko P iz S in premico l, ki gre skozi P, tako da bo pri pripadajočem mlinu na veter vsaka točka iz S središče vrtenja neskončno mnogokrat.