Invariante - rešitev naloge

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

23. 2. 2023

Rešitev naloge s predavanja, ki sem ga imel v okviru priprav na mednarodna matematična tekmovanja 13. 2. 2023.

Naloga

Na začetku so štirje žetoni v točki $(0, 0)$. V vsakem koraku lahko odstranimo en žeton iz točke (a, b) in ga nadomestimo z dvema žetonoma. Enega postavimo v točko $(a + 1, b)$ in drugega v točko $(a, b + 1)$. Dokažite, da bo po končnem številu korakov vedno obstajala točka z vsaj dvema žetonoma.

Rešitev. Vsak žeton utežimo. Pri tem žetonu v točki (a, b) dodelimo težo $\frac{1}{2^{a+b}}$.

V koraku lahko odstranimo žeton iz točke (a, b) in ga nadomestimo z enim žetonom v $(a + 1, b)$ in enim v $(a, b + 1)$. Opazimo, da velja

$$\frac{1}{2^{(a+1)+b}} + \frac{1}{2^{a+(b+1)}} = \frac{1}{2^{a+b}}.$$

Iz tega sledi, da je vsota tež vseh žetonov invariantna.

Na začetku je vsota tež enaka 4. Recimo, da smo naredili neko končno število korakov, in da je v vsaki točki kvečjemu en žeton. Če nam uspe pokazati, da vsota tež ne more biti enaka 4, smo končali.

Najprej opazimo, da bodo koordinate točk, v katerih imamo žetone, vedno nenegativne. Na začetku so žetoni namreč v $(0, 0)$, v koraku pa koordinate ni mogoče zmanjšati. Recimo, da imamo v vsaki točki (a, b), kjer $a, b \geq 0$, en žeton (torej imamo neskončno žetonov). Potem za vsoto tež velja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ker pa imamo v našem primeru končno takšnih točk, bo vsota tež strogo manjša od 4, torej obstaja točka, ki vsebuje vsaj dva žetona. $\square$

Opomba: V nalogi smo uporabili znano številsko vrsto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2.$$

Iz tega direktno sledi, da za vsak $N \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N} < 2.$$