Dvojno štetje, invariante in monovariante

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

7. februar 2025

1 Dvojno štetje

Naloga 1.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Dokažite

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Naloga 1.2. Naj bosta $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dokažite

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Naloga 1.3. Naj bo n naravno število. Dokažite

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Naloga 1.4. Dokažite

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Naloga 1.5. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in φ Eulerjeva funkcija. Dokažite

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Naloga 1.6 (Lema o rokovanju)**.** Dokažite, da za končen enostaven graf $G = (V, E)$ velja

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\left|E\right|.$$

Naloga 1.7. Naj bo $p_n(k)$ število permutacij množice $\{1, \ldots, n\}$ z natanko k fiksnimi točkami. Dokažite

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

Naloga 1.8. Na matematičnem tekmovanju je sodelovalo 200 tekmovalcev. Rešiti so morali 6 nalog. Vemo, da je vsako nalogo pravilno rešilo vsaj 120 tekmovalcev. Dokažite, da obstajata dva tekmovalca, ki sta skupaj rešila vseh 6 nalog.

Naloga 1.9. V igri lignja sodeluje n tekmovalcev, kjer je $n > 3$. Vsaka trojica tekmovalcev si določi tarčo, ki jo bo na naslednji preizkušnji poskusila izločiti. Dokažite, da obstaja tekmovalec, ki je tarča vsaj $\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ tekmovalcev.

Naloga 1.10. Naj bo S množica n oseb, pri čemer velja naslednje:

(i) Vsaka oseba pozna natanko k drugih oseb.

(ii) Vsaki 2 osebi, ki se poznata, imata natanko l skupnih znancev.

(iii) Vsaki 2 osebi, ki se ne poznata, imata natanko m skupnih znancev.

Dokažite
$$m(n-k) - k(k-l) + k - m = 0.$$

Naloga 1.11. Na univerzi je 10001 študent. Nekateri študenti se pridružijo raznim klubom (študent je lahko član več klubov). Nekateri klubi se združijo v organizacije (klub lahko pripada več organizacijam). Skupaj je k organizacij. Recimo, da velja sledeče:

(i) Vsak par študentov je v natanko enem klubu.

(ii) Za vsakega študenta in vsako organizacijo velja, da je študent v natanko enem klubu organizacije.

(iii) Vsak klub ima liho mnogo študentov. Dodatno, klub z $2m+1$ študenti (kjer je m naravno število) je v natanko m organizacijah.

Poiščite vse možne vrednosti k.

Naloga 1.12. Na tekmovanju je m tekmovalcev in n sodnikov, kjer je $n \geq 3$ liho število. Vsak kandidat dobi od vsakega sodnika oceno `pass` ali `fail`. Recimo, da da vsak par sodnikov isto oceno kvečjemu k tekmovalcem. Dokažite $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.

Naloga 1.13. Naj bosta n in k naravni števili ter naj bo S množica n točk v ravnini. Recimo, da velja

(i) nobene tri točke v S niso kolinearne in

(ii) za vsako točko P iz S obstaja vsaj k točk v S, ki so enako oddaljene od P.

Dokažite $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Naloga 1.14. Naj bo n liho naravno število večje od 1 in naj bodo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cela števila. Za vsako permutacijo a množice $\{1, \ldots, n\}$, definirano s predpisom $i \mapsto a_i$, definiramo
$$S(a) := \sum_{i=1}^{n} a_i c_i.$$
Dokažite, da obstajata takšni različni permutaciji a in b, da $n!$ deli $S(a) - S(b)$.

2 Invariante in monovariante

Naloga 2.1. Na tabli so napisana števila 1, ..., 2023. Obravnavaj sledeči situaciji:

(i) V vsakem koraku izberemo dve števili, a in b, in ju zamenjamo z $a + b$. Po 2022 potezah bo na tabli samo še eno število. Katero?

(ii) V vsakem koraku izberemo dve števili, a in b, in ju zamenjamo z $|a - b|$. Ali se lahko zgodi, da je 21 edino število na tabli?

Naloga 2.2. Krog razdelimo na šest krožnih izsekov in vanje zaporedoma v smeri urinega kazalca napišemo števila 1, 0, 1, 0, 0 in 0. V potezi lahko številoma v poljubnih dveh sosednjih izsekih prištejemo neko celo število. Ali lahko z zaporedjem takšnih potez izenačimo števila v vseh sektorjih?

Naloga 2.3. V ravnini ležijo trije paki. Hokejist udari enega izmed pakov tako, da v ravni črti zdrsi skozi preostala dva. Ali so lahko po 2023 udarcih vsi paki v enakem položaju kot na začetku?

Naloga 2.4. Koza se premika po koordinatnem sistemu. Iz točke (x, y) se lahko premakne v katerokoli od točk (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x + 1, y + 4)$ in $(x - 1, y - 4)$. Recimo, da začne v $(0, 1)$. Dokažite, da nikoli ne bo v $(0, 0)$.

Naloga 2.5. Na tabli imamo števila od 1 do 1000. Vsako število zamenjamo z vsoto njegovih števk, dokler ne dobimo enomestnega števila. Na koncu imamo na tabli torej 1000 enomestnih števil. Katero število je napisano največkrat?

Naloga 2.6. Ali lahko tabelo velikosti 8×8, ki ji odstranimo polji v diagonalno nasprotnih kotih, pokrijemo z dominami velikosti 1×2?

Naloga 2.7. Ali lahko tabelo velikosti 8×8 pokrijemo s petnajstimi 1×4 pravokotniki in enim 2×2 kvadratom?

Naloga 2.8. Na tabli so zaporedoma napisana naravna števila od 1 do n. V vsakem koraku lahko zamenjamo mesti poljubnih dveh števil. Dokažite, da se ne moremo vrniti v prvotno stanje po lihem številu zamenjav.

Naloga 2.9. Na začetku je v $n \times n$ tabeli $n - 1$ okuženih polj. Vsako sekundo se okuži vsako polje, ki je sosednje vsaj dvema okuženima poljema. Koliko polj bo okuženih v najslabšem primeru?

Naloga 2.10. Na celoštevilski premici leži nekaj kamnov. Če se na istem mestu nahajata dva kamna, ju lahko premaknemo: enega na prejšnje mesto in enega na naslednje. Ali se je po prvi potezi še možno vrniti na začetno pozicijo?

Naloga 2.11. Na začetku so štirje žetoni v točki $(0, 0)$. V vsakem koraku lahko odstranimo en žeton iz točke (a, b) in ga nadomestimo z dvema žetonoma. Enega postavimo v točko $(a+1, b)$ in drugega v točko $(a, b+1)$. Dokažite, da bo po končnem številu korakov vedno obstajala točka z vsaj dvema žetonoma.

Naloga 2.12. Dana je tabela velikosti $2n \times 2n$. V vsakem polju je napisana neka potenca števila 2 z nenegativnim celoštevilskim eksponentom. Na začetku so vsa števila različna. V vsakem koraku izvedemo eno izmed naslednjih potez:

(a) Izberemo poljubni dve sosednji polji ter poljubno naravno število k in obema poljema prištejemo k.

(b) Zamenjamo števili v dveh poljih, ki ležita simetrično čez središče tabele.

Ali je možno, da bo po končnem številu korakov v vseh poljih tabele zapisano isto število?

Naloga 2.13. Na zabavo je povabljenih $2n$ diplomatov. Vsak diplomat ima kvečjemu $n-1$ sovražnikov. Dokažite, da lahko diplomate posedemo okoli okrogle mize tako, da nihče ne sedi poleg svojega sovražnika.

Naloga 2.14. Nekaj pozitivnih celih števil je napisanih v vrsti. V vsakem koraku izberemo dve sosednji števili x in y, kjer je $x > y$ in x je na levi od y, in zamenjamo par (x, y) z $(y+1, x)$ ali $(x-1, x)$. Dokažite, da lahko to naredimo samo končno mnogokrat.

Naloga 2.15. Naj bo S končna množica vsaj dveh točk v ravnini. Denimo, da nobene tri točke iz S niso kolinearne. Z izrazom *mlin na veter* poimenujemo postopek, pri katerem na začetku izberemo premico l, ki gre skozi točko $P \in S$, in na kateri ne leži nobena druga točka iz S. Premica se vrti v smeri urinega kazalca okrog *središča vrtenja* P vse do takrat, dokler premica prvič ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta točka, ki jo označimo s Q, nato postane novo središče vrtenja in premica se sedaj vrti v smeri urinega kazalca okrog Q vse do takrat, dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta postopek se nikoli ne konča, središče vrtenja je vedno točka iz S.
Pokažite, da lahko vedno izberemo točko P iz S in premico l, ki gre skozi P, tako da bo pri pripadajočem mlinu na veter vsaka točka iz S središče vrtenja neskončno mnogokrat.