Konstrukcije v teoriji števil

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

18. december 2024

1 Praštevila

Naloga 1.1. Dokažite, da je praštevil neskončno mnogo.

Naloga 1.2. Naj bo n naravno število. Dokažite, da obstaja n zaporednih sestavljenih števil.

Naloga 1.3. Naj bo n naravno število. Dokažite, da obstaja $k \in \mathbb{N}$, da za vsak $m \geq k$ velja, da obstaja m zaporednih naravnih števil, med katerimi je natanko n praštevil.

Naloga 1.4. Naj bo n naravno število. Dokažite, da obstaja n zaporednih naravnih števil, ki niso popolna potenca praštevila.

Izrek 1.1: Dirichlet

Naj bosta a in b tuji si naravni števili. Aritmetično zaporedje $(an + b)_n$ vsebuje neskončno mnogo praštevil.

Naloga 1.5. Naj bosta a in b naravni števili. Pokažite, da obstaja neskončno mnogo naravnih števil n, ki jih ni mogoče zapisati kot $3ab + a + b$.

Naloga 1.6. Ali obstaja takšna neskončna množica naravnih števil, da vsota poljubnih nekaj njenih elementov ni popolna potenca?

Naloga 1.7. Ali obstaja zaporedje naravnih števil $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v katerem sta elementa zaporedja a_n in a_m tuja natanko tedaj, kadar $|m - n| = 1$?

2 Razno

Naloga 2.1. Dokažite, da ima enačba $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ neskončno mnogo celoštevilskih rešitev (a, b, c).

Naloga 2.2. (i) Najdite neskončno mnogo parov naravnih števil $a, b > 1$, da ab deli $a^2 + b^2 - 1$.

(ii) Določite vse celoštevilske vrednosti, ki jih lahko zavzame izraz

$$\frac{a^2 + b^2 - 1}{ab}.$$

Naloga 2.3. Konstruirajte takšno funkcijo $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, da velja

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

za vse $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Naloga 2.4. Naj bo $n > 1$ naravno število. Dokažite, da obstaja neskončno mnogo celih števil $k \geq 1$, da je število

$$\left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

liho.

Naloga 2.5. Naj bo n naravno število. Dokažite, da obstaja n-mestno število, deljivo s 5^n, ki ima same lihe števke.

3 Dodatne naloge

Naloga 3.1. V končnem zaporedju realnih števil je vsota poljubnih sedmih zaporednih členov negativna in vsota poljubnih enajstih zaporednih členov pozitivna. Določite maksimalno število členov zaporedja.

Naloga 3.2. Naj bosta k in n naravni števili. Dokažite, da obstajajo takšna naravna števila $m_1, \ldots, m_k$, da velja

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Naloga 3.3. Devet različnih naravnih števil je razporejenih na krožnici tako, da je produkt dveh nesosednjih števil vedno večkratnik števila n in produkt dveh sosednjih števil nikoli ni večkratnik števila n, kjer je n neko fiksno naravno število. Poiščite najmanjšo možno vrednost za n.

Naloga 3.4. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da je $b^n + n$ večkratnik od $a^n + n$ za vsako naravno število n. Dokažite, da je $a = b$.

Naloga 3.5. Poiščite vsa naravna števila n, za katera obstajajo takšna nenegativna cela števila $a_1, \ldots, a_n$, da velja

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$