Verjetnost 2

Asistent: Gregor Šega

1. oktober 2025

1. O zaporedjih realnih števil veste veliko (predvidevam). Kaj pa vemo o zaporedjih slučajnih spremeljivk? Na primer, kaj pravi KZVŠ? Pa CLI?

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{s.g.} E(X_1) \qquad \ldots \text{ predpostavke } \ldots$$

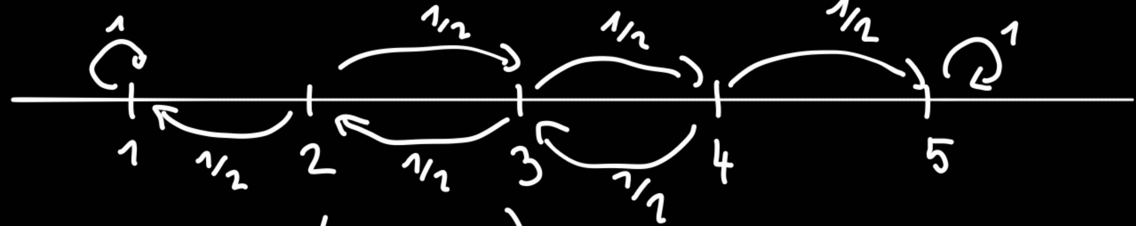
Pri Verjetnosti 2 ne bomo imeli neodvisnosti. $\dashrightarrow$

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}(X_1) = p$$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{s.g.} p$$

$$\text{Če} \quad X_1 =: X_k \qquad \frac{X_1 \cdot n}{n} \to X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

2. Sprehajalka se premika po množici stanj $\{1,2,3,4,5\}$. Premakne se levo ali desno, enako verjetno, neodvisno od prejšnjih korakov, razen na robu, ko se sploh ne premakne nikamor. Zaporedje slučajnih spremeljivk, ki ga bomo opazovali, je lokacija sprehajalke (po n korakih). Kako bi opisali to zaporedje? Kaj vemo o njem?



$$X_0 = 3 \rightsquigarrow X_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 4)\,\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 4)$$

$$\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_1 = i) \cdot \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_i = i)$$

Formula za popolno verjetnost

$$\mathbb{P}(X_2=j \mid X_0=i) = \sum_k \underbrace{\mathbb{P}(X_1=k \mid X_0=i)}_{p_{ik}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_2=j \mid X_1=k)}_{p_{jk}}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{i,k} \cdot p_{j,k} \quad \dots$$ gre za množenje matrik

$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/4 & 2/8 & 2/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \Big|_{X_0=3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X_\infty \Big|_{X_0=2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X_\infty \Big|_{X_0=1} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V ozadju kockarjev bankrot.

Prehodna matrika:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zanima nas $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$.

$\lambda_1 = -1/\sqrt{2}$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 1/\sqrt{2}$
$\lambda_4 = 1$
$\lambda_5 = 1$

verjetnost $\rightsquigarrow$ lastne vrednosti so med -1 in 1

3. Sprehajalka se premika po množici stanj $\{1,2,3,4,5\}$. Premakne se levo ali desno, enako verjetno, neodvisno od prejšnjih korakov, razen na robu, ko se premika ciklično (levo od 1 je 5). Kaj se (bistveno) spremeni (glede na prejšnjo nalogo)?

Simetrija $\Rightarrow$ $X_\infty \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$] intuicija

$$X_0=3 \rightsquigarrow X_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/4 & 1/16 & 6/16 & 1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\vdots$ simetrija, „zgubi se informacija kje smo začeli"

$$X_\infty \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Kaj pa, če je 6 stanj?

$\{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow$ dobimo dvodelen graf

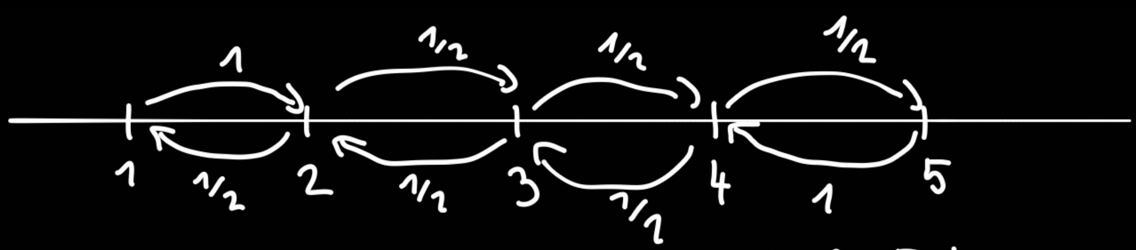
$$X_0 \equiv 0 \pmod 2 \quad \Rightarrow \quad X_{2n} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 1/3 & & 1/3 & & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_{2n+1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ni konvergence.

Lastne vrednosti? $\to 1$, $\to -1$ (ni konvergence) $\frac{1}{2}\cdot 1^n + \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

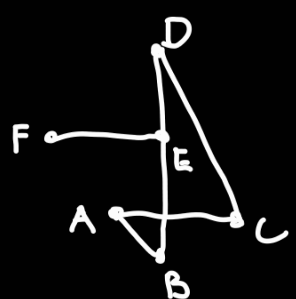
4. Enako kot prejšnja naloga, le da sta robni stanji taki, da se premakne (zagotovo) proti sredini.



$$X_0 = 3, \quad X_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = X_1$$

5. Narišite nek graf (z ravno prav točkami in ravno prav povezavami). Markovska veriga naj opisuje sprehajanje po tem grafu. Iz vsake točke se premaknemo v eno izmed sosednjih točk (izbiramo enakomerno, neodvisno). Zapišite prehodno matriko in grafično ponazoritev.

„slučajni sprehod na grafu"

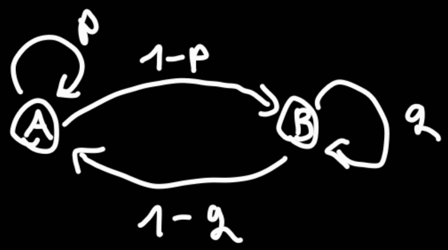


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P^n = ?$$

Graf je povezan, ne-dvodelen, ...

intuicija: $X_\infty \sim \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \quad \frac{val(v_i)}{2|E|}$

6. Splošna Markovska veriga z le dvema stanjema.



$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ (vedno l. vr.)

$\lambda_2 = tr(P) - \lambda_1$

$\lambda_2 = p+q-1$

$$\cancel{P^2 = \begin{bmatrix} p^2 + (1-p)(1-q) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}} \quad \vdots$$

↳ ali izračunamo $\det(A - \lambda I)$

Če je $p = q = 1$, imamo enaki lastni vrednosti.

↳ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^n$

Sicer sta lastni vrednosti različni:

$$P^n = \begin{bmatrix} \underbrace{a \cdot 1^n + b(p+q-1)^n}_{\text{potrebujemo samo ta element}} & 1 - a - b(p+q-1)^n \\ & \end{bmatrix}$$

zamenjamo $p \leftrightarrow q$

a in b dobimo tako, da vstavimo $n=0$ in $n=1$

1. Mečemo kocko. Stanje je trenutno število zaporedoma vrženih enakih vrednosti (recimo, da na kocki pade $1,2,1,4,3,4,4,5,5,5,5,2$, potem so stanja $1,1,1,\ 1,1,1,2,1,2,3,4,1$). Zapišite prehodno matriko in jo grafično predstavite.

$\boxed{\text{8. oktober 2025}}$

matrika ne gre ⇝ neskončno stanj

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/6 \,; & i = j-1,\ j \neq 1 \\ 5/6 \,; & j = 1 \\ 0 \,; & \text{sicer} \end{cases}$$

če si v stanju zapomniš še zadnjo števko → Markovska veriga

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & \cdots \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & \cdots \\ 5/6 & 0 & & \ddots & & \ddots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 5/6 & 5/36 & 1/36 & \cdots \\ 5/6 & ? & ? & 1/36 \\ 5/6 & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

koraki

$\underbrace{\overset{1/6}{\cdot} \cdots \overset{1/6}{0}\ 0\ \overset{1}{0}}$

$$p_{ij}^{(n)} = \left(1/6\right)^{j-1} \cdot 5/6 \ + \text{posebni primeri}$$

Nauk: potence P^n lahko napišemo brez, da poznamo last. vr.
⇝ razmislek

2. Mečemo kocko. Stanje je maksimalno število, ki je padlo do tega trenutka. Zapišite prehodno matriko in jo grafično predstavite.

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 5/6 & 1/6 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

j. vrednosti

$$P^n = \begin{bmatrix} (1/6)^n & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) \underset{j>i}{=} \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n$$

$$P(X_n = i \mid X_0 = i) = \left(\frac{i}{6}\right)^n$$

3. Mečemo kocko. Stanje je maksimalno število, ki je padlo v zadnjih petih metih. Zapišite prehodno matriko in jo grafično predstavite. Hm. Popravite.

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

Zadnjih 5 metov je del stanja

(i, j, k, l, m)

$6^5 \times 6^5$ matrika

$$P_{(i,j,k,l,m),(j,k,l,m,x)} = 1/6$$

$$P^n = \left[1/6^5 \right]_{ij} \qquad n \geq 5$$

„začetno stanje pozabimo"

4. Peter ima dva para tekaških copat. Teče vsako jutro. Hišo zapusti bodisi pri sprednjih bodisi pri zadnjih vratih. Ko zapusti hišo, izbere en par copat, ki je pri izhodnih vratih. Če copat ni, teče bos. Ko se vrne, v hišo spet vstopi bodisi pri sprednjih bodisi pri zadnjih vratih (vse izbire so vedno enakovredne in neodvisne od ostalih). Če ni bos, pri vstopnih vratih pusti copate. Kako pogosto teče bos? Kako pogosto je pri sprednjih vratih vsaj en par čevljev? Recimo, da Peter v ponedeljek in naslednjo soboto teče bos. Kolikšna je verjetnost, da tudi v petek (tisti vmes) teče bos? Kaj pa, če v ponedeljek in naslednjo soboto teče obut, kolikšna je potem verjetnost, da v petek (tisti vmes) teče bos?

1: $(AB;)$
2: $(A; B)$
3: $(B; A)$
4: $(0; AB)$

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 3/4 \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

2 in 3 lahko združimo ?

Rabimo samo dve stanji
#superg pred vrati z
več supergami

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \operatorname{tr} P - \lambda_1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

$$P^n = \begin{bmatrix} A + B\left(\frac{1}{4}\right)^n & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$n = 0$: $A + B = 1$

$n = 1$: $A + \frac{1}{4}B = 1/2$

$\frac{3}{4}B = 1/2 \Rightarrow B = \frac{2}{3},\ A = \frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1/3 & 1-1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{pozabi začetek}$$

2. vrstica = 1. vrstica

v $1/3$ primerov stanje 1, v $2/3$ stanje 2

$$\mathbb{P}(\text{bos}) = \underset{}{\overset{\text{stanje 2}}{2/3}} \cdot 1/2$$

$$\mathbb{P}(\text{vsaj } \underline{\text{en}} \text{ par pri sprednjih}) = \underset{\text{stanje 1}}{1/3} + 2/3 \cdot 1/2 = 2/3$$

$$\mathbb{P}(\text{oba pri zadnjih}) = 2/3 \cdot 1/2 = 2/6 = 1/3$$

$$\mathbb{P} = 1 - 2/6 = 4/6 = 2/3$$

$\underbrace{\overset{\text{bos}}{2}}_{\text{pon}}$ $\underbrace{2}_{\text{tor}}$ $\underbrace{?}_{\text{sre}}$ $\underbrace{?}_{}$ $\underbrace{2 \to 2}_{\text{pet}}$ $\underbrace{\overset{\text{bos}}{2}}_{\text{sob}}$

$t=0$ $t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$

$$\mathbb{P}(\underset{\substack{\text{in izbere} \\ \text{prava vrata}}}{X_3 = 2} \mid X_0 = 2, X_4 = 2) \qquad \mathbb{P}(A \cap B \mid C \cap D)$$

5. Mečemo (ne nujno pošten) kovanec. Gledamo zaporedje, stanje zadnjih dveh izvedenih metov. Dokažite, da je to markovska veriga, zapišite prehodno matriko in izračunajte njene potence. Seveda komentirajte!

Stanja: GG CC GC CG

$$P = \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$P^n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} GG & CC & GC & CG \end{array} \\ \begin{bmatrix} p^2 & (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) \\ - & \| & - & \\ - & \| & - & \\ - & \| & - & \end{bmatrix} \end{array}$$

$n \geq 2$: $P^n = P^2$

(pomembna sta le zadnja dva koraka, ni važno kje začnemo)

6. Kockarjev bankrot: kockar ima k enot denarja. Vsakič stavi 1 in z verjetnostjo p zmaga ter dobi 1, sicer izgubi 1. Igra toliko časa, dokler bodisi ne zakocka vsega bodisi ne doseže skupnega zneska n. Izračunajte verjetnost, da doseže svoj željeni znesek. *Opomba. To nalogo bomo uporabili še nekajkrat. Morda pa smo jo že enkrat srečali, na prvih vajah?*

$$a_k = \mathbb{P}(\text{prej } n \text{ kot } 0 \mid X_0 = k) = \mathbb{P}_k(\text{prej } n \text{ kot } 0)$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 1$$

$$a_k = p \cdot a_{k+1} + (1-p) \cdot a_{k-1}, \quad 0 < k < n$$

Nastavek ... $\rightsquigarrow$ naslednjič

29. oktober 2025

$$\lambda^n = p\lambda^{n+1} + (1-p)\lambda^{n-1}$$

$$p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0 \qquad \cancel{\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p}}$$

$$(p\lambda - (1-p))(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1-p}{1/2}$$

i) $p = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$a_k = A(1)^k + B \cdot (1)^k \cdot k$$
$$a_k = A + Bk$$
$$a_k = \frac{k}{n}$$

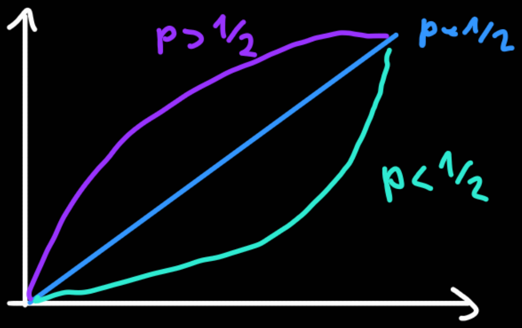
ii) $p \neq 1/2$

$$a_k = A\,1^k + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^k$$

$$a_0: \quad 0 = A + B$$

$$a_n: \quad 1 = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

$$a_k = A\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$$



2. Sprehajalka se sprehaja po ciklu s 5 točkami. Izračunajte potence prehodne matrike.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^n =$$

tega se nam ne da računat

3. Sistem je v enem izmed dveh stanj, ki ju označimo z a in b. V času 0 je v stanju a, prav tako v času 1. Od takrat naprej veljajo naslednja pravila: če je sistem v dveh zaporednih korakih v istem stanju, se v naslednjem koraku prestavi v drugo stanje z verjetnostjo 0,8, sicer pa z verjetnostjo 0,5. Dokažite, da ta proces lahko opišemo kot markovsko verigo (na ustreznem prostoru stanj). Zapišite prehodno matriko te markovske verige. Izračunajte verjetnost, da se sistem v času 10 nahaja v stanju a.

Prostor stanj: $\overset{1}{(a,a)}, \overset{2}{(a,b)}, \overset{3}{(b,a)}, \overset{4}{(b,b)}$ zadnji dve stanji

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Začetek

$$\underset{0}{a},\ \underset{1}{a},\ \underset{2}{-},\ \underset{3}{-},\ \underset{4}{-},\ \underset{5}{-},\ \underset{6}{-},\ \underset{7}{-},\ \underset{8}{-},\ \underset{9}{-},\ \underset{10}{a}$$

$$P(S_{10}=a) = (P^9)_{aa,aa} + (P^9)_{aa,ba} \doteq 49{,}5\,\%$$

4. Imamo dve posodi, v prvi so tri črne kroglice, v drugi pa tri bele. Na vsakem koraku izvlečemo eno kroglico iz prve posode in eno iz druge ter ju vrnemo v zamenjanem vrstem redu. Utemeljite, da je to markovska veriga, zapišite prehodno matriko, razmislite o limiti potenc prehodne matrike, določite povprečen čas, ki preteče med dvema zaporednima stanjema, ko so vse črne kroglice v prvi posodi.

Stanja: # belih v 1. posodi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n kroglic: stanja $0, 1, \dots, n-1$

$p_{01} = 1, \quad p_{n,n-1} = 1$

$0 < i < n$

$$p_{i,i-1} = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$
$$p_{i,i} = \frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n} \cdot 2$$
$$p_{i,i+1} = \left(\frac{n-i}{n}\right)^2$$

$$P^n \approx \begin{bmatrix} \underline{0.05} & 0.45 & 0.45 & 0.05 \\ - & '' & - & \\ - & '' & - & \\ - & '' & - & \end{bmatrix}$$

$$N = \min\{n \geq 1, X_n = 0\}$$
$$E(N \mid X_0 = 0) = 1 + E(N \mid X_0 = 1)$$
$$E(N \mid X_0 = k) := a_k$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 + a_1 \\ a_1 &= \tfrac{1}{9}\cdot 1 + \tfrac{4}{9}(a_1+1) + \tfrac{4}{9}(a_2+1) \\ a_2 &= \tfrac{4}{9}(a_1+1) + \tfrac{4}{9}(a_2+1) + \tfrac{1}{9}(a_3+1) \\ a_3 &= 1 + a_2 \end{aligned}\right\}$$

sistem 4 enačb, 4 neznank

$\Rightarrow \underline{a_0 = 20}$

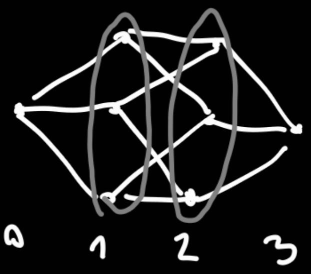
↳ to bo izrek

Kaj pa $p_{i,j}(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{\binom{n}{j}^2}{\binom{2n}{n}}$ ← deluje za $n=3$

vse kroglice na mizo, v vsaki posodi pol

$$n: E(N \mid X_0 = 0) \overset{?}{=} \binom{2n}{n}$$

5. Muha se sprehaja po kocki, med oglišči. Vsakič se iz oglišča odpravi v enega izmed sosednih oglijšč. Saj to je tudi markovska veriga? ✓ Ima prehodno matriko? ✓ Ima ta matrika kakšno lepo lastnost? ✓ Po koliko časa (v povprečju) se muha vrne v začetno oglišče? Po koliko časa doseže nasprotno? Koliko korakov je potrebnih, da obišče vsa oglišča?



Gledamo samo oddaljenost.

vrnitev v začetno oglišče

↳ sistem 4 enačb, 4 neznank

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N := \min\{n \geq 1 \mid X_n = 0\}$$

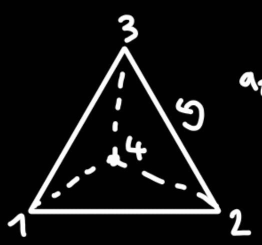
$(X_n)_n$ je „nova" veriga

$$a_k := \mathbb{E}(N \mid X_0 = k)$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 + a_1 \\ a_1 &= 1/3 + 2/3(1+a_2) \\ a_2 &= 2/3(1+a_1) + 1/3(1+a_3) \\ a_3 &= 1 + a_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0 = 8$$

1. Muha se sprehaja po tetraedru. Po koliko korakih v povprečju se vrne v izhodišče? Muha in pajek se sprehajata po tetraedru. Po koliko korakih v povprečju pajek ulovi muho?

$\boxed{\text{5. november 2025}}$



$a_2 = a_3 = a_4$

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

simetrija: $a_2 = a_3 = a_4$

$N = \#$ št. korakov do vrnitve

$a_k := \mathbb{E}(N \mid X_0 = k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}(1+a_2) + \frac{1}{3}(1+a_3) + \frac{1}{3}(1+a_4) = 1 + a_2 \\ a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1+a_2) = 1 + \frac{2}{3}a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = 4$$

Alternativno:

$$N \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots \end{pmatrix} \sim 1 + \mathrm{Geom}(1/3)$$

$$E(N) = 1 + \frac{1}{1/3} = 4$$

Če imamo pajka in muho:

$P(\text{skočita v isto}) = \frac{2}{9}$

$M = \#\text{korakov do srečanja} \sim \mathrm{Geom}(2/9)$

$E(M) = 9/2$

Nauk: Pajku se bolj splača čakati na nekem polju

2. Premislite, da velja $\sum_{n=0}^{\infty}(P^n)_{ii} = \frac{1}{1-P(X_k=i \text{ za nek } k\geq 1|X_0=i))}$ in kaj to pomeni.

<u>Desna stran</u>: $\mathbb{P}(X_i = i$ za nek $k \geq 1 \mid X_0 = i)$ je verjetnost, da se nekoč vrnemo v i

↳ označimo z ρ_i

$N_i :=$ št. bivanj v stanju $i \sim \text{Geom}(1-\rho_i)$

Torej je desna stran enaka $\mathbb{E}(N_i \mid X_0 = i) = \frac{1}{1-\rho_i}$.

<u>Leva stran</u>: $(P^n)_{ii}$ je verjetnost, da smo po n korakih spet v začetnem stanju i. Torej je $\sum_{n=0}^{\infty}(P^n)_{ii} = \mathbb{E}(N_i \mid X_0 = i)$.

Metoda indikatorjev: $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}(X_i = i) \Rightarrow \mathbb{E}_i(N_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(X_i = i)]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{ii}$$

Stanje je povrnljivo $\Leftrightarrow \rho_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(P^n)_{ii} = \infty$

3. Imejmo slučajni sprehod po celih številih, verjetnost, da iz stanja i preskočimo v $i+1$, naj bo p. Določite verjetnost, da se iz stanja 0 slej ko prej vrnete v stanje 0.

$$(P^n)_{ii} = \begin{cases} 0, & n \text{ lih} \\ \binom{2k}{k}(p(1-p))^k, & n = 2k \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P^n)_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty}(P^{2k})_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}p^k(1-p)^k = \frac{1}{1-\rho_0}$$

↳ grdo, tega ne želimo delat

Brez škode za splosnost lahko predpostavimo $p > 1/2$.

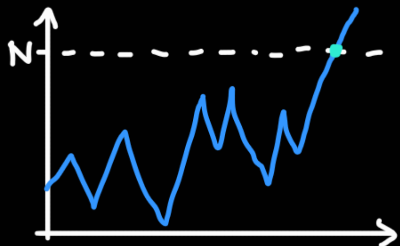
Velja $\rho_0 = (1-p)\mathbb{P}_{-1}(\underbrace{\text{slej ko prej pridemo v } 0}_{=:A})$

$\quad + p\,\mathbb{P}_1(\text{slej ko prej pridemo v } 0)$

Potrebujemo $\mathbb{P}_1(A)$ in $\mathbb{P}_{-1}(A)$.

Račun poenostavimo tako, da dogodek A „aproksimiramo" s preprostejšimi dogodki.

Za fiksen N izračunajmo:



kockarjev bankrot

$$\mathbb{P}_1(\text{prej v } N \text{ kot } 0) = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1-\frac{1-p}{p}}{1} = \frac{2p-1}{p}$$

$\frac{1}{2}<p<1$

$$\downarrow N\to\infty$$

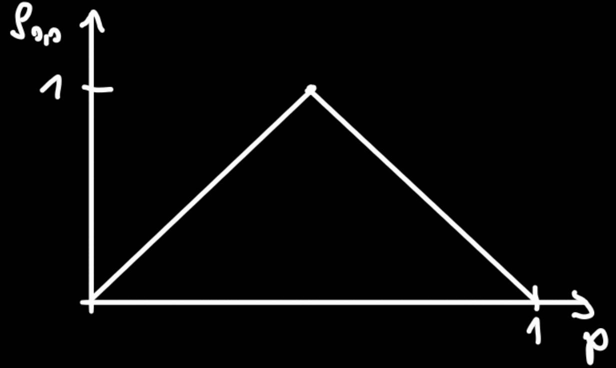
$$1-\mathbb{P}_1(\text{slej kot prej pridemo v } 0)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(\text{slej ko prej pridemo v } 0) = 1-\frac{2p-1}{p} = \frac{1-p}{p}$$

Ker je $p>1/2$, dobimo še $\mathbb{P}_{-1}(A)=1$.

$$\rho_0 = (1-p)\,\mathbb{P}_{-1}(\text{slej ko prej v } 0) + p\,\mathbb{P}_1(\text{slej ko prej v } 0)$$

$$= (1-p)\cdot 1 + p\,\frac{1-p}{p} = 2(1-p)$$



(za $p=1/2$ je treba ločeno preverit, zgornja izpeljava ni korektna)

<u>Alternativno:</u>

Poskusimo poračunat: $\binom{2k}{k}p^k(1-p)^k = \frac{2k!}{k!\,k!}p^k(1-p)^k$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi 2k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\left(\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)\right)^2}p^k(1-p)^k$$

Stirlingova formula

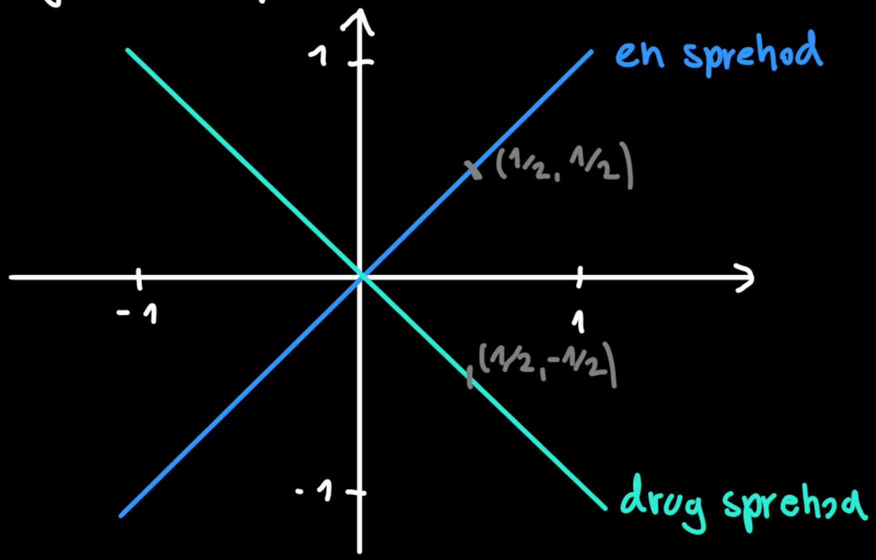
$$= [4p(1-p)]^k\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(P_{ii}^{2k}) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi k}}[4p(1-p)]^k = \begin{cases}\infty\ ; & p=\frac{1}{2}\\ <\infty\ ; & \text{sicer}\end{cases}$$

Vrsta divergira pri $p=1/2 \Rightarrow \rho_{0,0}=1$ (0 je povrnljivo stanje).

4. Imejmo simetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}^2$. Preverite, da so stanja povrnljiva.

Zaradi simetrije je dovolj preveriti $\rho_{0,0} = 1$.
Trik: gibanje razcepimo na dva neodvisna sprehoda po $\mathbb{Z}$:



Vsak korak v $\mathbb{Z}^2$ si lahko predstavljamo kot vsoto dveh premikov po premicah ↗ in ↘ (npr. $(1,0) = (1/2, 1/2) + (1/2, -1/2)$).
Potem bomo v $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ vsak sprehod posebej bo v 0:

$$\mathbb{P}_{(0,0)}(\text{po } n \text{ korakih v } (0,0)) = \mathbb{P}_0(\text{po } n \text{ korakih v } 0) \cdot \mathbb{P}(\text{po } n \text{ korakih v } 0)$$
$$= \left(\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n\right)$$
$$p = 1/2: \quad \approx \left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}$$

Vrsta je torej:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{ii} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty$$

Harmonična vrsta divergira $\Rightarrow \rho_0 = 1$.

Alternativno: Lahko bi $\mathbb{P}(\text{po } n \text{ korakih v } 0)$ zapisali kot:
$n = \#$ korakov (soda)

$n = 2g + 2l$: (g – gor, l – levo)
$$\sum_{g=0}^{\infty} \binom{n}{g} \binom{n-g}{g} \binom{n-2g}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^{2g} \left(\frac{1}{4}\right)^{2l} \rightsquigarrow \text{grdo za računat}$$

1. Imejmo simetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}^3$. Preverite, da so stanja minljiva. Kakšne misli o tem?

$\boxed{\text{12. november 2025}}$

Izračunajmo vsoto po n: verjetnosti, da smo po n korakih v 0, če začnemo v 0.

Enako kot prej: n sod

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_0(X_n = 0) = ?$$

gor/dol, naprej/nazaj, levo/desno

$$P_0(X_n=0) = \sum \binom{2n}{2k}\binom{2n-2k}{2\ell}\binom{2k}{k}\binom{2\ell}{\ell}\binom{2n-2k-2\ell}{n-k-\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum \binom{2n}{k,k,\ell,\ell,n-k-\ell,n-k-\ell}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum \frac{(2n)!}{k!\,k!\,\ell!\,\ell!\,(n-k-\ell)!\,(n-k-\ell)!}\cdot\frac{n!\,n!}{n!\,n!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum \left(\frac{1}{6}\right)^{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{k,\ell,(n-k-\ell)}^{2}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\,\text{"}\binom{n}{n/3\ \ n/3\ \ n/3}\text{"}\binom{2n}{n}$$

$\hookrightarrow \approx n/3$ (mogoče $\lfloor\ \rfloor, \lceil\ \rceil$)

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}3^{n}\binom{n}{n/3\ \ n/3\ \ n/3}$$

$$\sum_{\substack{0\le k,\ell\\ k+\ell\le n}} 1 = 3^{n}$$

Stirling: $\binom{n}{n/3\ \ n/3\ \ n/3} \approx 3^{n}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot 3^{3/2}$

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\cdot 3^{n}\cdot n^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}3^{n}\cdot C\cdot\frac{1}{n}$$

$$= C\sum_{n=0}^{\infty} n^{-3/2}$$

Ker je $-3/2 < -1$, vrsta konvergira, torej so stanja minljiva.

Spomnimo se definicij s predavanj:

- povrnljivo stanje $\Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{vrnitve}) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{se izgubimo}) = 0$
- minljivo stanje $\Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{vrnitve}) < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{se izgubimo}) = 1.$

2. Imejmo simetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}^d$, recimo $S_0, S_1, S_2, \ldots$. Dokažite, da velja

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{E_0(|\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}|)}{n}}_{\text{delež novih stanj}} = 1 - \underbrace{P_0(S_n = 0 \text{ za nek } n \geq 1)}_{\text{verjetnost vrnitve}}.$$

Komentarji?

Glede na simulacijo sprehoda po $\mathbb{Z}$, ki smo jo pogledali, pričakujemo, da bo leva stran šla proti 0, torej, da je verjetnost vrnitve enaka 1.

Definirajmo množici dogodkov:

$A_n := \{\text{v } n\text{-tem koraku stopimo v novo stanje}\}$

$B_n := \{\text{do } n\text{-tega koraka se ne vrnemo v izhodišče}\}$

Kako so ti dogodki povezani z zgornjo formulo?

Opazimo: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(B_n) = 1 - \mathbb{P}_0(S_n = 0 \text{ za nek } n \geq 1)$

$$\underbrace{1}_{\text{izhodišče}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(A_k) = |\{S_0, \ldots, S_n\}|$$

Velja: $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[|\{S_0, \ldots, S_n\}|]}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(A_k)}{n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(A_n)$

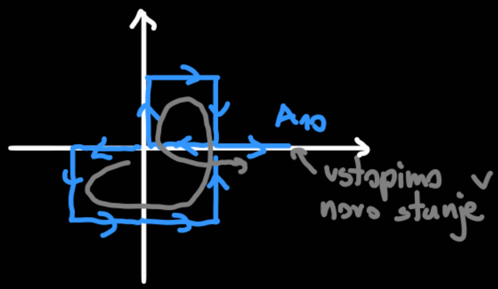
(lahko se seveda zgodi, da zaporedje ne konvergira, povprečje pa)

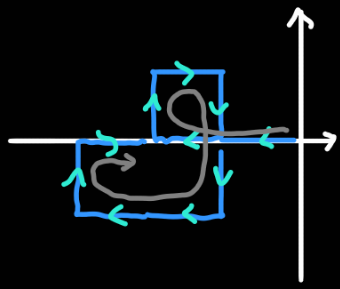
če obstaja limita teh verjetnosti, potem lahko to napišemo na drugačen način po principu:
če $a_1, a_2, a_3, \ldots \longrightarrow a$
potem $a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \longrightarrow a$

Če torej dokažemo, da velja $\mathbb{P}_0(A_n) = \mathbb{P}_0(B_n)$ (oz. limite), je naloga končana.

Preslikava iz A_n v B_n je bijekcija:

$F: A_n \to B_n$, $x \mapsto$ obrnemo x (hoja nazaj)

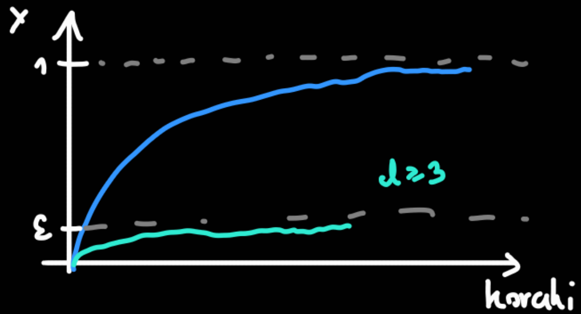




hodimo nazaj po isti poti (zamalnjeni v izhodišče)

3. Imejmo simetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}^d$. Preverite s simulacijami minljivost/povrnljivost stanj.

Izkaže se, da so stanja povrnljiva za $d \in \{1,2\}$ in minljiva sicer.



Y... delež sprehodov, ki so se že vrnili v izhodišče

4. Še ena glede simetričnega sprehoda na $\mathbb{Z}$: izračunajte $E_0(T_0^+)$. Namig: kockarjev bankrot, izračunajte povprečen čas igranja (torej, koliko iger v povprečju kockar potrebuje, da iz začetnega kapitala k pride do končnega kapitala bodisi 0 bodisi n).

$T_0^+ := \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 0\}$

N ... # korakov kockarja

Imamo simetrični slučajni sprehod $\rightsquigarrow p = 1/2$.

Definirajmo še: $a_k := \mathbb{E}_k(N)$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$a_k = 1 + \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

znebimo se $\overrightarrow{+1}$ $\quad a_k - a_{k-1} = 1/2\, a_{k-1} + 1/2\, a_{k+1} - 1/2\, a_k - 1/2\, a_{k-2}$

$$\Rightarrow 0 = a_{k+1} - 3a_k + 3a_{k-1} - a_{k-2}$$

Rekurzija:
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$(x-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2,3} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow a_k = (A + Bk + Ck^2)\cdot 1^k \\ &a_0 = 0 \Rightarrow A = 0 \\ &a_n = 0 \Rightarrow Bn = -Cn^2 \Rightarrow B = -Cn \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_k = Ck(k-n)$$

$a_1 = C(1-n) = \frac{1}{2} a_2 + \cancel{\frac{1}{2} a_0} + 1 = \frac{1}{2} C \cdot 2(2-n) + 1$

$\Rightarrow C = -1$

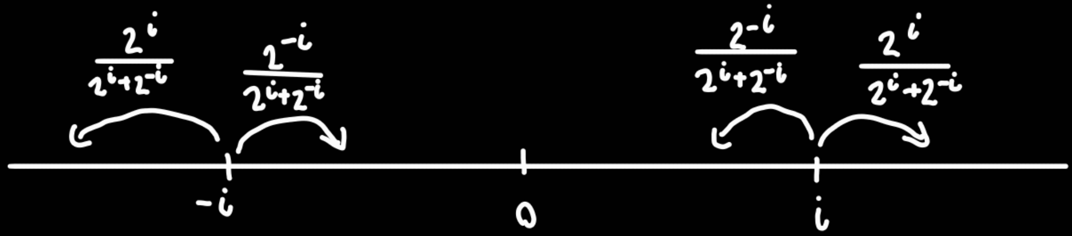
$\Rightarrow a_k = k(n-k)$

Velja $\mathbb{E}_0(T_0^+) = 1 + \underbrace{\mathbb{E}_1(T_0^+)}_{\substack{\text{simetrija} \\ \mathbb{E}_{-1}}} \geq 1 + n - 1 = n \quad \forall n$

$\uparrow$ saj $\mathbb{E}_1(T_0^+) \geq n-1$

$\Rightarrow \mathbb{E}_0(T_0^+) = \infty$.

5. Predlog s predavanj: ubežni slučajni sprehod. Prehodne verjetnosti so $p_{i,i+1} = \frac{2^i}{2^i+2^{-i}}$ in $p_{i,i-1} + p_{i,i+1} = 1$. Izračunajte $a_k = P_k(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty)$ in $b_k = P_k(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty)$.



Opazimo simetrijo: $a_k = b_{-k}$.

Splošni člen: $a_k = \underbrace{p_{k,k+1}}_{= \frac{2^k}{2^k+2^{k-1}}} a_{k+1} + p_{k,k-1} \cdot a_{k-1}$

$$\Rightarrow (2^k + 2^{k+1}) a_k = 2^k a_{k+1} + 2^{-k} a_{k-1}$$

$$2^k (a_k - a_{k+1}) = 2^{-k} (a_{k-1} - a_k)$$

$$\Rightarrow a_{k-1} - a_k = 4^{-k} (a_k - a_{k-1})$$

$\boxed{\text{19. november 2025}}$

Za $k \geq 0$ dobimo:

$$a_{k+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{k} 2^{-i(i+1)} (a_1 - a_0)$$

Torej potrebujemo samo a_0 in a_1.

Čemu je enaka vsota $a_k + b_k$?

Očitno $a_k + b_k \leq 1$ (disjunktna dogodka). Ali velja enakost?

Imejmo dogodka $\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\}$ in $\{\lim X_n = \infty\}^c$.

Velja: $\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\} \subseteq \{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\}^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_0 < \dots < X_j > X_{j+1}\}$ $\quad / \mathbb{P}_k(\cdot)$

$\mathbb{P}_k(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty) \leq \mathbb{P}_k(\{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\}^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_0 < \dots < X_j > X_{j+1})$,

kjer so sumandi na desni:

$$\mathbb{P}_k(X_0 < X_1 < \dots < X_j > X_{j+1}) = p_{k,k+1} p_{k+1,k+2} \cdots p_{k+j-1,k+j} \cdot p_{k+j,k+j-1}$$
$$\leq p_{k+j,k+j-1} = \frac{2^{-k-j}}{2^{k+j} + 2^{-k-j}} \leq \frac{2^{-k-j}}{2^{k+j}} = 2^{-2k-2j}$$

Torej: $\mathbb{P}_k(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty) \leq 1 - \mathbb{P}_k(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2kj-2j} = 2^{2kj} \cdot 4/3$.

$\Rightarrow a_{-k} = b_k \leq 1 - a_k \leq 2^{-2k+2} \cdot 1/3 \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Ko torej pošljemo $k \to \infty$:

$$a_{-k}, b_k \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad a_k \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow$ za velike k so stanja minljiva.

Ker so vsa stanja povezana, so vsa stanja minljiva

$\Rightarrow a_k + b_k = 1 \Rightarrow a_0 = 1/2$

$$1 = a_\infty = 1/2 + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(i+1)} (a_1 - 1/2)$$

$\Rightarrow$ dobimo a_1 in smo končali.

2. Dokažite naslednjo lemo: Naj bo $h_A(i) = P_i(X_n \in A$ za nek $n \geq 0)$. Potem je h_A najmanjša od vseh funkcij h, ki zadoščajo pogojem:

(i) $h(i) = 1$ za $i \in A$

(ii) $h(i) = \sum_k p_{ik} h(k)$ za $i \notin A$

(iii) $h(i) \geq 0 \quad \forall i$

(i) in (iii) sta očitna, (ii) je popolna verjetnost $\Rightarrow h_A$ ustreza

Dokažimo: $h(i) \geq h_A(i)$.

Trik: definiramo novo verigo, ko zadenemo A:

$$\tilde{p}_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}; & i \notin A \\ 1; & i = j \in A \\ 0; & i \neq j \text{ in } i \in A \end{cases}$$

Opazimo: $\mathbb{P}_i(X_n \in A) = \tilde{\mathbb{P}}_i(X_n \in A)$. Primerjamo h_A s funkcijo $\mathbb{1}_A$:

- $(\tilde{\mathbb{P}} \mathbb{1}_A)(i) = \sum_k \tilde{p}_{ik} \mathbb{1}_A(k) = \sum_{k \in A} \tilde{p}_{i,k}$ = verj. da iz i skočimo v A
- $(\tilde{\mathbb{P}}^n \mathbb{1}_A)(i)$ = verjetnost, da iz i v n korakih skočimo v A

Pomemben trik: Kaj se zgodi v limiti?

$$\left(\lim_{n\to\infty} P^n \mathbb{1}_A\right) = h_A \quad (*)$$

Opazimo: $(Ph)(i) = \sum_k p_{ik} \cdot h(k) = h(i) \quad (**)$

S pomočjo $(*)$ in $(*)$ dobimo

$$h \geq \mathbb{1}_A \qquad / P$$

$$Ph \geq P\mathbb{1}_A \overset{(**)}{\Rightarrow} h \geq P\mathbb{1}_A \rightsquigarrow \text{ponavljamo} \ldots$$

$\Rightarrow h \geq P^n \mathbb{1}_A$, kar v limiti da: $h \geq \lim_{n\to\infty} P^n \mathbb{1}_A = h_A$.

3. Oglejmo si naslednji sprehod na nenegativnih celih številih: naj velja $p_{01} = 1$, za $i \geq 1$ pa $p_{i,i-1} + p_{i,i+1} = 1$ in $p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\alpha} p_{i,i-1}$ za nek parameter α. V odvisnosti od tega parametra izračunajte $P_i(X_n = 0 \text{ za nek } n)$. Komentirajte.

Imamo: $p_{i,i-1} = \frac{i^\alpha}{i^\alpha + (1+i)^\alpha}$ in $p_{i,i+1} = \frac{(i+1)^\alpha}{i^\alpha + (1+i)^\alpha}$.

Opazimo uporabnost leme: $\mathbb{P}_i(X_n \in \{0\} \text{ za nek } n) = h_{\{0\}}(i) =: h(i)$.

Velja: 1) $h(0) = 1$

2) $i \geq 1$: $h(i) = p_{i,i-1} h(i-1) + p_{i,i+1} h(i+1)$

$$= \frac{i^\alpha}{i^\alpha + (1+i)^\alpha} h(i-1) + \frac{(1+i)^\alpha}{i^\alpha + (1+i)^\alpha} h(i+1)$$

3) $h(i) \geq 0$

Razpišemo (2):

$i=1$: $h(1) = \frac{1}{1+2^\alpha} \cdot 1 + \frac{2^\alpha}{1+2^\alpha} h(2)$

$i=2$: $h(2) = \frac{2^\alpha}{2^\alpha + 3^\alpha} h(1) + \frac{3^\alpha}{2^\alpha + 3^\alpha} h(3)$

$\vdots$

vedno bo ena neznanka več kot je enačb
$\Rightarrow$ izrazimo v odvisnosti $h(1)$

Izrazimo: $h(2) = \frac{1+2^\alpha}{2^\alpha}\left(h(1) + \frac{1}{1+2^\alpha}\right) = \frac{1+2^\alpha}{2^\alpha} h(1) - \frac{1}{2^\alpha}$

$$h(3) = \frac{2^\alpha + 3^\alpha}{3^\alpha}\left[\left(\frac{1+2^\alpha}{2^\alpha} - \frac{2^\alpha}{2^\alpha + 3^\alpha}\right) h(1) - \frac{1}{2^\alpha}\right] = \cdots =$$

$$= \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{1^\alpha}\right) h(1) - \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) \Rightarrow \text{imamo idejo za splošno formulo}$$

Z indukcijo lahko dokažemo:

$$h(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) h(1) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Ampak: $h(1)$ moramo izbrati tako, da bo h najmanjša možna

Uporabimo (3) iz leme: $h(n) \geq 0$

$$\text{zahtevamo} \quad h(1) \geq \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}} = 1 - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}} \quad \forall n$$

Torej: $h(1) \geq 1 - \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}} \Rightarrow h(1) = 1 - \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}}$

Končno: za $\alpha \leq 1$ vrsta divergira in je $h(n) = 1 \; \forall n$, za $\alpha > 1$ pa konvergira.

Stacionarna porazdelitev:

Imejmo markovsko verigo s prehodno matriko P. Pravimo, da je π stacionarna porazdelitev, če je $\pi = \pi P$ oziroma

$$\sum_k \pi_k p_{k,i} = \pi_i \quad \forall i$$

Če je $\pi_k p_{k,i} = \pi_i p_{i,k}$ za $\forall i,j$ (π je reverzibilna), je avtomatsko π stacionarna.

4. Slučajni sprehod na neusmerjenem grafu. Iz stanja *i* se premaknemo v eno izmed sosednjih stanj (vsako enako verjetno). Določite stacionarno porazdelitev.

Imamo: $p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(i)} ; & i \sim j \\ 0 ; & i \nsim j \end{cases}$

Ali si lahko izmislimo π tako, da bo $\pi_k \cdot p_{k,i} = \pi_i \cdot p_{i,k}$.

Za $i \nsim j$ je π karkoli, sicer:

$$i \sim j: \quad \pi_j \cdot \frac{1}{\deg(j)} = \pi_i \frac{1}{\deg(i)}$$

Očitno vzamemo:

$$\pi_j := \frac{\deg(j)}{\sum_i \deg(i)} \Rightarrow \text{stacionarna}$$

5. Mečemo (ne nujno pošten) kovanec. Gledamo zaporedje, stanje zadnjih dveh izvedenih metov. (To smo že delali.) Spomnite se njenih potenc. Poiščite stacionarno porazdelitev. Ali je reverzibilna? Komentirajte, razložite.

Vemo:

$$P = \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & p \end{bmatrix} \qquad P^n = \begin{array}{c} \begin{matrix} GG & CC & GC & GG \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} p^2 & (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) \\ - & \text{''} & - & \\ - & \text{''} & - & \\ - & \text{''} & - & \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{za } n \geq 2$$

$\Rightarrow [p^2 + (1-p)^2 \quad p(1-p) \quad p(1-p)]$ je stacionarna

Ni reverzibilna: $0 = \pi_{GG} p_{GG,CG} \neq \pi_{CG} p_{CG} p_{GG} = p(1-p)p \neq 0$

6. Premikanje kroglic med posodama (n črnih v eni, n belih v desni, zamenjamo eno iz leve in eno iz desne). Določite stacionarno porazdelitev. Kako hitra je konvergenca k stacionarni porazdelitvi?

X_n = # črnih v 1. posodi

$$p_{k,k-1} = \frac{k^2}{n^2}, \quad p_{k,k+1} = \frac{(n-k)^2}{n^2}, \quad p_{k,k+1} = \frac{2k(n-k)}{n^2}$$

Poskusimo poiskati π: $\pi_k \cdot p_{k,i} = \pi_i p_{i,k}$.
Za $i=k$ in $|i-k| \geq 2$ vedno velja. Preostane primer:

$i = k+1$:

$$\pi_k \frac{(n-k)^2}{\cancel{n^2}} = \pi_{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2}{\cancel{n^2}}$$

$$\Rightarrow \pi_k (n-k)^2 = \pi_{k+1} (k+1)^2 \quad (*)$$

Že od prej vemo, da je naravna izbira za π: $\pi_k = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$
Preverimo lahko, da to ustreza $(*)$.

O konvergenci še ne vemo ničesar, zato se bomo k tej nalogi vrnili.

2. Mešanje kart z zamenjavo pozicij dveh izbranih kart. Stacionarna porazdelitev?

26. november 2025

Rešujemo $\pi P = \pi$, kjer je $p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\binom{n}{2}}; & \exists \text{ transpozicija } \tau : \tau(i) = j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

Opazimo, da vedno velja $p_{i,j} = p_{j,i}$. (*)
Poiščimo reverzibilen π:

$$\pi_i p_{i,k} = \pi_k p_{k,i} \quad \forall i,k$$

(*) $\Rightarrow$ Vzamemo lahko konstanten π: $\pi_i = \frac{1}{n!}$ $\forall i$.

3. Naj bo $\{X_k\}_k$ markovska veriga na prostoru stanj S s prehodno matriko P. Naj bo A neprazna podmnožica S, taka, da je njen komplement $S \setminus A$ tudi neprazna. Naj obstaja stacionarna porazdelitev π. Definiramo zaporedje slučajnih spremenljivk Y_k s predpisom $Y_k = \mathbb{1}_{(X_k \in A)}$.

(a) Pod pogojem, da je porazdelitev X_0 znana (recimo μ), izračunajte prehodno verjetnost $P(Y_{k+1} = j | Y_k = i)$ za $i, j \in \{0, 1\}$.

(b) Ali je $\{Y_k\}_k$ homogena markovska veriga?

(c) Dokažite, da velja

$$\sum_{i \in A} \pi_i \sum_{j \notin A} p_{ij} = \sum_{i \notin A} \pi_i \sum_{j \in A} p_{ij}.$$

(d) Predpostavite, da je porazdelitev X_0 enaka π. Ali to vpliva na odgovor pod točko (b)?

c) Računamo

stacionarna

$$\mathrm{LHS} = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} \pi_i p_{i,j} = \sum_{j \notin A} \Big(\pi_j - \sum_{i \notin A} \pi_i p_{i,j}\Big)$$

$$= \sum_{j \notin A} \pi_j - \sum_{j \notin A} \sum_{i \notin A} \pi_i p_{i,j} = \sum_{j \notin A} \pi_j - \sum_{i \notin A} \sum_{j \notin A} \pi_i p_{ij}$$

$$= \sum_{j \notin A} \pi_j - \sum_{i \notin A} \pi_i \Big(1 - \sum_{j \in A} p_{i,j}\Big) = \sum_{i \notin A} \pi_i \sum_{j \in A} p_{i,j} = \mathrm{RHS}$$

Z besedami: za stacionarno porazdelitev je:

$\mathbb{P}$(zapustimo A v naslednjem koraku) $= \mathbb{P}$(pridemo v A v naslednjem koraku)

(a) Pod pogojem, da je porazdelitev X_0 znana (recimo μ), izračunajte prehodno verjetnost $P(Y_{k+1} = j | Y_k = i)$ za $i, j \in \{0, 1\}$.

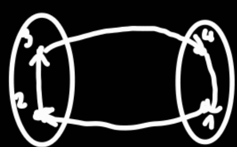
Začnimo z $i = j = 1$:

$$\mathbb{P}_\mu(Y_{k+1} = 1 | Y_k = 1) = \frac{P(Y_{k+1} = 1, Y_k = 1)}{\mathbb{P}(Y_k = 1)} = \frac{\sum_{i \in S} \mu(i) \sum_{j \in A} \sum_{\ell \in A} p^{(k)}_{i,j} p_{j,\ell}}{\sum_{i \in S} \mu(i) \sum_{j \in A} p^{(k)}_{i,j}}$$

Podobno za ostale i, j.

(b) Ali je $\{Y_k\}_k$ homogena markovska veriga?

Ne, protiprimer je veriga:



Verjetnost, da iz 2 zapustimo A ni enaka kot verjetnost, da iz 3 zapustimo A.

(d) Predpostavite, da je porazdelitev X_0 enaka π. Ali to vpliva na odgovor pod točko (b)?

Da, to pravi podnaloga (c).

4. Ena lahka z izpita: Homogena markovska veriga ima prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Določite stacionarno porazdelitev.
Določite $p_{1,3}(n)$.
Definiramo $T_1^+ = \min\{i \geq 1; X_i = 1\}$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke T_1^+, pogojno na $X_0 = 1$. Pomagajte si z verjetnostjo $P_1(X_k = 1, X_{k-1} \neq 1, \ldots, X_1 \neq 1)$.
Izračunajte (pogojno na $X_0 = 1$) pričakovano vrednost slučajne spremenljivke T_1^+, torej $E_1(T_1^+)$.

Rešujemo $\pi P = \pi$ oziroma:

$$\pi_1 = \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3$$
$$\pi_2 = \tfrac{1}{3}\pi_1 + \tfrac{1}{6}\pi_3$$
$$\cancel{\pi_3 = \tfrac{2}{3}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{3}\pi_3}$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

eno enačbo lahko vedno nadomestimo s pogojem $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Rešitev: $[7/21 \;\; 4/21 \;\; 10/21]$.

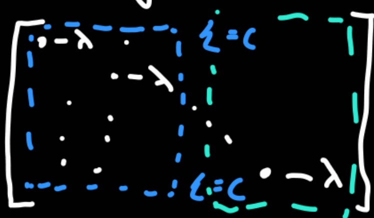
Za $p_{1,3}(n)$ rabimo lastne vrednosti matrike P:

1 je vedno lastna vrednost

$$\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tfrac{1}{3}\lambda^2 + \tfrac{7}{12}\lambda + \tfrac{1}{12} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \tfrac{2}{3}\lambda - \tfrac{1}{12})$$
$$= (1-\lambda)(\lambda + \tfrac{1}{2})(\lambda + \tfrac{1}{6})$$

alternativa za iskanje lastnih vrednosti

<u>Trik</u>: Opazujemo matriko $P - \lambda I$. Izberemo par stolpcev. Recimo, da ima podmatrika iz teh stolpcev lastnost, da se vse njene vrstice seštejejo v neko konstanto c (skica).
Potem se tudi ostali vrstice ostalih stolpcev (skica) seštejejo v konstanto, namreč v $1 - \lambda - c$. Potem je linearna kombinacija stolpcev, kjer vse stolpce množimo z $(1 - \lambda - c)$, vse pa z $-c$, ničelna. To pa pomeni, da so stolpci $P - \lambda I$ linearno odvisni $\Rightarrow$ λ je lastna vrednost.



V našem primeru: Prvi stolpec $P - \lambda I$ je $[-\lambda \;\; 1/2 \;\; 1/2]^T$ $\Rightarrow$ če vzamemo $\lambda = -1/2$, je ta stolpec podmatrika, kjer so vsote vrstic enake
$\Rightarrow \lambda = -1/2$ je lastna vrednost
(to torej dobimo skoraj brez truda)

Torej bo: $P = S\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}S^{-1} \Rightarrow P^n = S\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \lambda_3^n\end{bmatrix}S^{-1} = \left[\quad ? \quad\right]$?

Matrike S ne želimo računati. Zanima nas samo en člen:

Člen $p_{1,3}(n)$ je oblike: (ta pristop lahko uporabimo za katerikoli člen P^n)

$$p_{1,3}(n) = x\cdot 1^n + y\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + z\left(-\tfrac{1}{6}\right)^n$$

Rabimo le še x, y, z. Vemo že $p_{1,3}(0)=0$, $p_{1,3}(1)={}^2/_3$.

$$P^2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 7/18 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow p_{1,3}(2) = {}^7/_{18}$$

Rešimo sistem in dobimo: $x = {}^{10}/_{21}$, $y = -{}^1/_3$, $z = -{}^1/_7$

$$\Rightarrow p_{1,3}(n) = {}^{10}/_{21} - {}^1/_3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - {}^1/_7\left(-\tfrac{1}{6}\right)^n$$

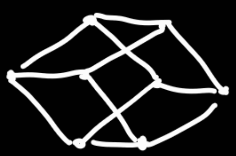
<u>Opomba</u>: Opazimo, da je $x = \pi_3 = {}^{10}/_{21}$ in $p_{1,3}(n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_3$.
Še več: Ko nas zanima hitrost konvergence $p_{1,3}(n) \longrightarrow \pi_3$ (in konvergence cele porazdelitve) je između $\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$ in $\left(-\tfrac{1}{6}\right)^n$ ravno $\left(-\tfrac{1}{6}\right)^n \longrightarrow 0$ mnogo hitrejša. Lastna vrednost $-{}^1/_2$ tako „zavira" konvergenco in je uporabna kot merilo za hitrost konvergence.
V splošnem: Po absolutni vrednosti drugo največja lastna vrednost ima pomembno vlogo.

Velja: $\mathbb{P}_1(X_k = 1, X_{k-1} \neq 1, \dots, X_1 \neq 1) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$; $k \geq 2$ (glej matriko)
Torej: $T_1^+\big|_{X_0=1} \sim 1 + \mathrm{Geom}(1/2) \Rightarrow \mathbb{E}_1(T_1^+) = \frac{2}{1} + 1 = 3$.

<u>Opazimo</u>: $3 = \dfrac{1}{7/21} = \dfrac{1}{\pi_1}$. Zanimivo!

1. Uporabite $\pi_i = E_i(T_i^+)^{-1}$ (kjer je $T_i^+ = \min\{n \geq 1; X_n = i\}$), da preverite rezultate pri nalogi z muho, ter pri nalogi z dvema posodama s po tremi belimi/črnimi kroglicami.

3. december 2025



$$\pi_A = \frac{3}{3\cdot 8} = \frac{1}{8} \Rightarrow \mathbb{E}(T_A^+) = 8 \quad \checkmark$$

Kroglice: $\pi_0 = \dfrac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{\binom{6}{3}} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{1}{20} \Rightarrow \mathbb{E} = 20 \quad \checkmark$

2. Šahovski konjiček. Skače, začne spodaj levo na šahovski deski. Po koliko korakih se v povprečju vrne?

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

$$\sum \deg = 4\cdot 2 + 8\cdot 3 + 20\cdot 4 + 16\cdot 6 + 16\cdot 8$$

$$\Rightarrow \pi_A = \frac{2}{336} = \frac{1}{168} \quad \Rightarrow \mathbb{E}(T_A^+) = 168$$

4. Naloga z izpita: Homogena markovska veriga ima prehodno matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Določite stacionarno porazdelitev. Določite $P(X_n = 2 | X_0 = 2)$. Naj bo $0 < s < t$. Izrazite $P(X_s = 3 | X_0 = 3, X_t = 3)$. Koliko je limita $\lim_{t\to\infty} P(X_s = 3 | X_0 = 3, X_t = 3)$? Kaj pa, če je $s = \lfloor c \cdot t \rfloor$ za nek $0 < c < 1$?

Stacionarna: sistem $\pi P = \pi$, $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi = [1/6, 4/15, 17/30]$.

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ (vedno)

$\lambda_2 = 0$ (prvi stolpec)

$\lambda_3 = \operatorname{tr} P - \lambda_1 - \lambda_2 = 1/6$

$$\mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 2) = [P^n]_{2,2} = A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot (1/6)^n$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 1/12 + 1/9 + 1/12 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$1/12 + 1/9 + 1/12 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

~~$n=0$: $A + B + C = 1$~~ ni pomembno, $\lambda_2 = 0$

$n=1$: $A + \frac{1}{6}C = 1/3$

$n=2$: $A + \frac{1}{36}C = 5/18$

$\Rightarrow C = 2/5$, $A = 4/15$

Naj bo $0 < s < t$.

$$\mathbb{P}(X_s = 3 | X_0 = 3, X_t = 3) = \frac{\mathbb{P}(X_s = 3, X_0 = 3, X_t = 3)}{\mathbb{P}(X_0 = 3, X_t = 3)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_s = 3, X_0 = 3, X_t = 3) \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = 3)}}{\mathbb{P}(X_t = 3 | X_0 = 3)} = \frac{\mathbb{P}(X_t = 3 | \overset{\text{markovska}}{\cancel{X_0 = 3}}, X_s = 3)\, \mathbb{P}(X_0 = 3, X_s = 3)}{\mathbb{P}(X_t = 3 | X_0 = 3)\, \mathbb{P}(X_0 = 3)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_t = 3 | X_s = 3)\, \mathbb{P}(X_s = 3 | X_0 = 3) \cdot \cancel{\mathbb{P}(X_0 = 3)}}{\mathbb{P}(X_t = 3 | X_0 = 3)\, \cancel{\mathbb{P}(X_0 = 3)}} = \frac{[P^{t-s}]_{3,3}\, [P^s]_{3,3}}{[P^t]_{3,3}}$$

Na izpitu lahko tu končamo, $[P^n]_{3,3}$ dobimo na enak način kot $[P^n]_{2,2}$.

Izkaže se $[P^n]_{3,3} = \frac{17}{30} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$, $n \geq 1$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\cancel{[P^{t-s}]_{3,3}}\,[P^s]_{3,3}}{\cancel{[P^t]_{3,3}}} = [P^s]_{3,3}$$

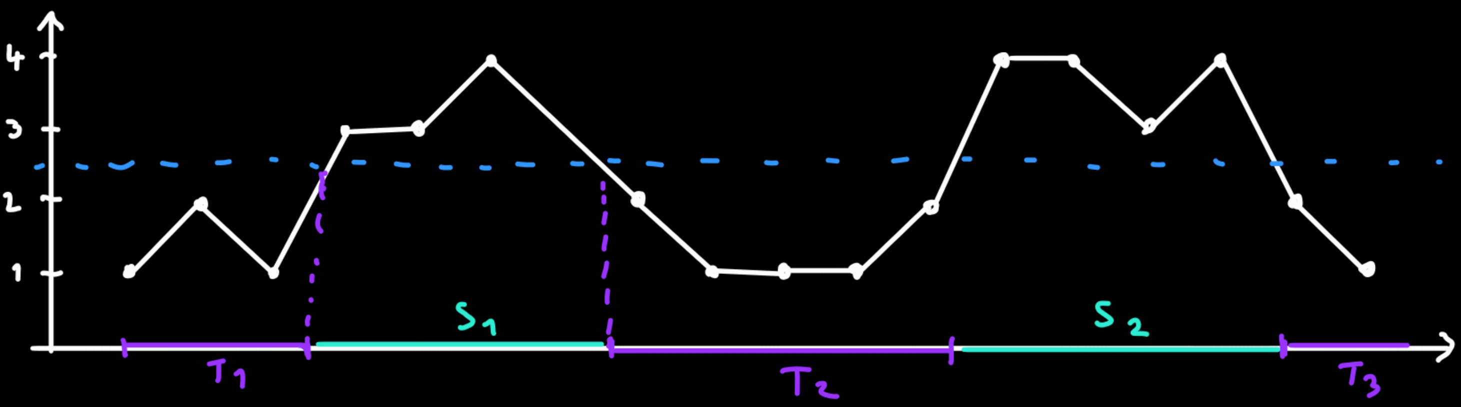
Če je $s = \lfloor ct \rfloor$ za $0 < c < 1$, izgine še informacija za s $(s, t \to \infty,\ |s-t| \to \infty)$ $\Rightarrow$ dobimo $\frac{17}{30}$.

→ naloga 3, stran 23?

1. Razlaga prejšnje naloge: imamo stroj, ki je v enem izmed štirih stanj (dela, dela z ropotanjem, ne dela, ampak kašlja, ne dela in je čisto fuč). Opazujemo, ali stroj dela ali ne. Recimo, da je

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Od trenutka, ko stroj proizvaja, koliko korakov v povprečju potrebujemo, da se spet pokvari? Kolikšen je delež korakov, ko je stroj v delovanju, v naslednjem koraku pa ne deluje več (to je stopnja pokvarljivosti)?



$$\frac{T_1 + T_2}{S_1 + T_1 + S_2 + T_2 + \dots} = \mathbb{P}(X \in \{1, 2\}) = \pi_1 + \pi_2$$

$$\frac{\dfrac{T_1 + T_2 + \dots + T_k}{k}}{\dfrac{S_1 + T_1 + S_2 + T_2 + \dots + S_k + T_k}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}(T_1)}{\mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(S_1)}$$

in

$$\frac{k}{S_1 + T_1 + \dots + S_k + T_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(S_1)} = \sum_{i\in A} \pi_i \sum_{j \notin A} p_{ij}$$

10. december 2025

Stacionarna porazdelitev: $\pi P = \pi \rightsquigarrow \pi = [3/16, 1/4, 7/24, 13/48]$

Naj bo $\mathbb{E}(D_1) = d$, $\mathbb{E}(N_1) = n$.

Vemo: $\frac{n}{D_1+N_1+\dots+D_n+N_n} \longrightarrow \frac{1}{d+n} = \sum_{i\in A}\sum_{j\notin A} \pi_i p_{ij}$

$= \pi_1(p_{1,3}+p_{1,4}) + \pi_2(p_{2,3}+p_{2,4})$

↳ to zdaj imamo

Delež časa, ko stroj dela: $\frac{D_1+\dots+D_n}{D_1+N_1+\dots+D_n+N_n} \longrightarrow \frac{d}{d+n} = \pi_1+\pi_2$

Dobili smo sistem za d in n $\Rightarrow d = \frac{14}{3}$, $n = 2$

Opazimo: povprečen čas delovanja $\mathbb{E}(D_1)$ lahko dobimo kot:

$$\mathbb{E}(d_1) = d = \frac{d/d+n}{1/d+n} = \frac{\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{i\in A}\pi_i \sum_{j\notin A} p_{ij}}$$

Nadalje: Izračunajmo P^n.

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1$$

↳ $\lambda_2 = 0$

2\. stolpec je konstanten $\Rightarrow P^n = \begin{bmatrix} \vdots & 1/4 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1/4 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1/4 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1/4 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow p_{i,2}(n) = 1/4$

Za ostale potrebujemo lastne vrednosti: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,$?

$$P^2 = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/4 & \sim \\ 3/16 & 1/4 & \sim \\ 3/16 & 1/4 & \sim \\ 3/16 & 1/4 & \sim \end{bmatrix}$$

↳ $\lambda_3 = 0$ $\qquad \Rightarrow \lambda_4 = \operatorname{tr} P - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1/4$

Potem je:

$$P^n = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/4 & 7/24 + C(1/4)^n & 13/48 - C(1/4)^n \\ 3/16 & 1/4 & 7/24 + D(1/4)^n & 13/48 - D(1/4)^n \\ 3/16 & 1/4 & 7/24 + E(1/4)^n & 13/48 - E(1/4)^n \\ 3/16 & 1/4 & 7/24 + F(1/4)^n & 13/48 - F(1/4)^n \end{bmatrix}$$

→ vsota mora biti: 1

Opomba: Lastne vrednosti P^n so natanko λ^n.

2. Mečemo pošteno kocko, s S_m označimo skupno vsoto izidov na prvih m metih. Naj bo $p_n = P(S_m = n \text{ za nek } m)$. Ocenite p_{2025}.

Malo poračunamo: $p_1 = \underbrace{1/6}_{1}$, $p_2 = \underbrace{1/6}_{2} + \underbrace{1/6 \cdot 1/6}_{1+1}$, $p_3 = \underbrace{1/6}_{3} + \underbrace{1/6 \cdot 1/6}_{2+1} + \underbrace{1/6 \cdot 1/6}_{1+2} + \underbrace{(1/6)^3}_{1+1+1}$

Rekurzivno: pogojujemo na 1. met: $p_n = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\tfrac{1}{6}}^{P(X_1=k)} p_{n-k}$

Hkrati: $p_0 = 1$, $p_n = 0$ za $n < 0$

Poiščimo splošni člen:

$$\lambda^6 = 1/6(\lambda^5 + \lambda^4 + \dots + \lambda^2 + 1)$$

$\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow p_{2025} = A \cdot 1^n + B\lambda_2^n + \dots \overset{\text{za velike } n}{\approx} A$

Po KZVŠ vemo $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} E(X_1) = 7/2$.

Hkrati pa je $\frac{n}{S_n} \approx p_n$ za velike n: $\frac{n}{S_n} \longrightarrow 2/7$

$p_n \nearrow$

$\Rightarrow p_{2025} \approx 2/7$

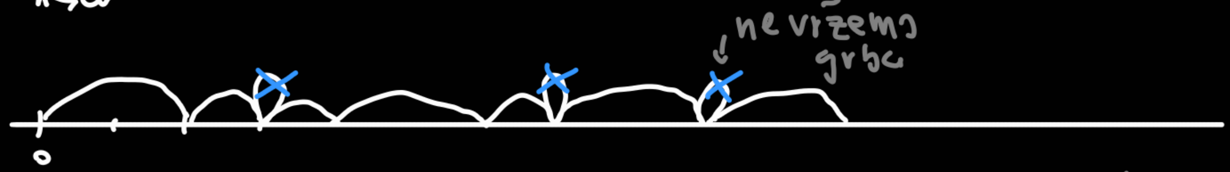
3. Še ena podobna: na vsakem metu vsakič vržemo tri poštene kovance, s S_m označimo skupno vsoto padlih grbov v prvih m metih. Naj bo $p_n = P(S_m = n \text{ za nek } m)$. Koliko je $\lim_{n\to\infty} p_n$?

$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$ $\quad E(X_1) = 3/2$

Enako kot prej $\frac{S_n}{n} \longrightarrow E(X_1) = 3/2$, $\quad \frac{n}{S_n} \longrightarrow 2/3$

Zakaj $\lim_{n\to\infty} p_n = 2/3$ ni ok?

Skica:



p_n = „delež obiskanih" $= \frac{\text{koliko različnih smo obiskali}}{\text{kam smo prišli}}$ zanke bi šteli dvakrat

$X_1 | X_1 \neq 0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ $\quad E(X_1 | X_1 \neq 0) = 12/7$

$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{E(X_1 | X_1 \neq 0)} = 7/12 \neq 2/3$

4. Dokažite trditev:

Naj bodo $f_1, \ldots, f_N \geq 0$ dana števila, za katere velja $\sum_{k=1}^{N} f_k = 1$. Označimo $\mu = \sum_{k=1}^{N} k f_k$. Definiramo zaporedje u_n s predpisi $u_n = 0$ za $n < 0$, $u_0 = 1$ in $u_n = \sum_{k=1}^{N} f_k u_{n-k}$ za $n \geq 1$. Še ena tehnična zahteva: $GCD\{k; f_k > 0\} = 1$. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\mu}.$$

Konstruiramo MV:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \end{array} \begin{bmatrix} f_1 & 1-f_1 & & \\ \frac{f_2}{1-f_1} & 0 & \frac{1-f_1-f_2}{1-f_1} & \\ \frac{f_3}{1-f_1-f_2} & 0 & 0 & \frac{1-f_1-f_2-f_3}{1-f_1-f_2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Za čas ustavljanja T_0^+ velja:

$\mathbb{P}_0(T_0^+ = 1) = f_1$, $\mathbb{P}_0(T_0^+ = 2) = f_2, \ldots, \mathbb{P}_0(T_0^+ = f_n)$.

Potem je: $\mathbb{E}_0(T_0^+) = \sum_{n=1}^{N} k f_n = \mu$

Vemo pa $\frac{1}{\mathbb{E}_0(T_0^+)} = \pi_0 = \frac{1}{\mu}$ po izraku s predavanj

Prav tako po izreku s predavanj: $p_{0,0}(n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_0$.

↳ tu smo uporabili aperiodičnost ipd.

Preostane preveriti, da je zaporedje $p_{0,0}(n)$ natanko $(u_n)_n$ iz navodil. Dovolj je preveriti, da reši rekurzivno zvezo, saj le ta enolično določa $(u_n)_n$.

- $p_{0,0}(0) = 1$ ✓
- $p_{0,0}(n) = 0$ za $n < 0$ ✓
- $p_{0,0}(n) = \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot p_{0,0}(n-k)$

Razpišimo $p_{0,0}(n)$ pogojno na vrednosti T_0^+:

$$p_{0,0}(n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_0^+ = k) \cdot p_{0,0}(n-k) = \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot p_{0,0}(n-k) \checkmark$$

<u>Opomba</u>: S tem izrekom bi lahko zdaj rešili prejšnji dve nalogi.

3. Še ena podobna: na vsakem metu vsakič vržemo tri poštene kovance, s S_m označimo skupno vsoto padlih grbov v prvih m metih. Naj bo $p_n = P(S_m = n \text{ za nek } m)$. Koliko je $\lim_{n\to\infty} p_n$?

$$p_n = \tfrac{1}{8} p_n + \tfrac{3}{8} p_{n-1} + \tfrac{3}{8} p_{n-2} + \tfrac{1}{8} p_{n-3}$$

$$p_n = \tfrac{3}{7} p_{n-1} + \tfrac{3}{7} p_{n-2} + \tfrac{1}{7} p_{n-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3/7 + 2\cdot 3/7 + 3\cdot 1/7} = \frac{7}{12}$$

4. Dokažite trditev:

Naj bodo $f_1, \ldots, f_N \geq 0$ dana števila, za katere velja $\sum_{k=1}^N f_k = 1$. Označimo $\mu = \sum_{k=1}^N k f_k$. Definiramo zaporedje u_n s predpisi $u_n = 0$ za $n < 0$, $u_0 = 1$ in $u_n = \sum_{k=1}^N f_k u_{n-k}$ za $n \geq 1$. Še ena tehnična zahteva: $GCD\{k; f_k > 0\} = 1$. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\mu}.$$

$$p_n = u_n = \sum_{k=1}^N f_k p_{n-k} \qquad \mu = \sum_{k=1}^N k f_k$$

2. Mečemo pošteno kocko, s S_m označimo skupno vsoto izidov na prvih m metih. Naj bo $p_n = P(S_m = n \text{ za nek } m)$. Ocenite p_{2025}.

$$p_n = \tfrac{1}{6}(p_{n-1} + p_{n-2} + \cdots + p_{n-6}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{1/6\,(1+2+3+4+5+6)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Zaporedni nizi

1. Mečemo (pošten) kovanec. Če pade grb, zapišemo 1, če pade cifra, zapišemo 0. Koliko metov v povprečju potrebujemo, da dosežemo nek predpisan niz, recimo 0011? Kaj pa 1001? (Kaj pa 101101?) Seveda rešite splošno.

17. december 2025

Imamo markovsko verigo s $S = \{\text{zadnji 4 meti}\}$.

$|S| = 16 \Rightarrow \pi_{0011}$

Potem $\mathbb{E}_{0011}(T^+_{0011}) = \frac{1}{\pi_{0011}} = 16$.

Nas zanima pričakovan čas, ko začnemo igro, ne pa ko že začnemo s 0011. V tem primeru je to enako.

Zapišemo lahko: $\mathbb{E}(\underbrace{0011 \to 0011}_{=16}) = \mathbb{E}(\to 0011)$.

Kaj pa 1001? Ta je drugačen $\quad 100\underline{1} \longrightarrow \underline{1}001$

lahko imamo prekrivanje

Spet $\mathbb{E}(100\underline{1} \longrightarrow \underline{1}001) = 16$

$\qquad \| $

$\qquad \mathbb{E}(1 \longrightarrow 1001)$

Kaj pa $\mathbb{E}(\longrightarrow 1001)$?

Velja $\mathbb{E}(\to 1001) = \mathbb{E}(\to 1) + \mathbb{E}(1 \longrightarrow 1001) = 2 + 16 = 18$

<u>Opomba</u>: Problem je ravno v prekrivanju. Največ prekrivanja je pri 1111:

$$\mathbb{E}(\to 1111) = \mathbb{E}(\overset{1\to 1}{\to 1}) + \mathbb{E}(\overset{11\to 11}{1 \to 11}) + \mathbb{E}(\overset{111\to 111}{11 \to 111}) + \mathbb{E}(\overset{1111\to 1111}{111 \to 1111}) = 2+4+8+16 = 30$$

Ta niz je tak, da se z veliko verjetnostjo pojavi dvakrat zapored: 11111

Niz 11111 se v povprečju pojavi na vsakih $2^5 = 32$ korakov.

Rabimo še $\mathbb{E}(\to 101101)$.

$$\mathbb{E}(\to 101101) = \mathbb{E}(101 \longrightarrow 101101)$$

$$\mathbb{E}(\to 101101) = \mathbb{E}(101 \longrightarrow 101101) + \mathbb{E}(1 \longrightarrow 101) + \mathbb{E}(\to 1) = 64+8+2 = 74$$

Posplošitev: opica na računalniku (slovenska abeceda):

$$\mathbb{E}(\to \text{BANANA}) = \mathbb{E}(\text{BANANA} \longrightarrow \text{BANANA}) = 25^6$$

2. Mečemo (pošten) kovanec. Če pade grb, zapišemo 1, če pade cifra, zapišemo 0. Recimo, da imamo dva predpisana niza, označimo ju z A in B. Kolikšna je verjetnost, da prej zapišemo niz A kot niz B? Spet rešite splošno, konkretno pa za $A = 0011$ in $B = 1001$. Ali se rezultat te naloge sklada z rezultatom prejšnje?

Definiramo $T := T_A \wedge T_B = (\to A) \wedge (\to B)$

Opazimo: $(\to A) = T + \mathbb{1}(B \text{ pred } A) \cdot (B \to A) \quad | \mathbb{E}(\cdot)$

$$\mathbb{E}(\to A) = \mathbb{E}(T) + \mathbb{P}(B \text{ pred } A) \cdot \mathbb{E}(B \to A)$$

↳ zaradi neodvisnosti

↱ prekrivanje

Rabimo torej: $\mathbb{E}(1001 \longrightarrow 0011) = \mathbb{E}(001 \to 0011)$

Opazimo: $\mathbb{E}(\to 0011) = \mathbb{E}(0011 \to 0011) = 16$

↳ ni prekrivanja

$$\mathbb{E}(\to 0011) = \underbrace{\mathbb{E}(\to 001)}_{=\mathbb{E}(001 \to 001) = 8} + \mathbb{E}(001 \longrightarrow 0011)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(001 \to 0011) = 8$$

Dobili smo enačbo: $16 = \mathbb{E}(T) + \mathbb{P}(B < A) \cdot 8$

Še eno enačbo dobimo, če zamenjamo A in B:

$$\mathbb{E}(\to B) = \mathbb{E}(T) + \mathbb{P}(A < B)\, \mathbb{E}(A \to B)$$
$$18 = \mathbb{E}(T) + (1 - \mathbb{P}(B < A)) \cdot 16$$

Rešimo sistem $\rightsquigarrow \mathbb{P}(B < A) = 7/12$

Opazimo: Iz sistema dobimo formulo:

$$\mathbb{P}(A < B) = \frac{\mathbb{E}(B \to A) + \mathbb{E}(\to B) + \mathbb{E}(\to A)}{\mathbb{E}(A \to B) + \mathbb{E}(B \to A)}$$

3. Še ena zanimiva s tega področja. Mečemo (pošten) kovanec. Če pade grb, zapišemo 1, če pade cifra, zapišemo 0. Označimo $A = 011$, $B = 100$ in $C = 001$. Ugotovite, kolikšne so verjetnosti, da A dobite pred B, da B dobite pred C, in da C dobite pred A. Presenečeni?

Morda vam pade na pamet kakšna posplošitev teh nalog?

$\mathbb{E}(\to A) = 8, \quad \mathbb{E}(\to B) = 8, \quad \mathbb{E}(\to C) = 18$

$\mathbb{E}(A \to B) = \mathbb{E}(011 \to 100) = \mathbb{E}(1 \to 100) = 6$

$\mathbb{E}(\to 100) = \mathbb{E}(100 \to 100) = 8$

$\mathbb{E}(\to 100) = \mathbb{E}(\to 1) + \mathbb{E}(1 \to 100)$

$= 2 + \mathbb{E}(1 \to 100)$

$\mathbb{E}(B \to A) = \mathbb{E}(0 \to 011) = 6$

$\mathbb{E}(A \to C) = \mathbb{E}(011 \to 001) = \mathbb{E}(\to 001) = 8$

$\mathbb{E}(C \to A) = \mathbb{E}(001 \to 011) = \mathbb{E}(\to 011) = 8$

$\mathbb{E}(B \to C) = \mathbb{E}(100 \to 001) = \mathbb{E}(00 \to 001) = 2$

to se da dobiti tudi iz geo. porazdelitve, saj čakamo do 1. enke pri samih ničlah $\Rightarrow \mathbb{E}(00 \to 001) = \frac{1}{1/2} = 2$

$\mathbb{E}(\to 001) = \mathbb{E}(\to 00) + \mathbb{E}(00 \to 001)$

$\mathbb{E}(00 \to 00) = 4 = \mathbb{E}(0 \to 00)$

$\mathbb{E}(\to 00) = \mathbb{E}(\to 0) + \mathbb{E}(0 \to 00) = 2 + 4 = 6$

$\mathbb{E}(C \to B) = \mathbb{E}(001 \to 100) = \mathbb{E}(1 \to 100) = 6$

S formulo dobimo: $\mathbb{P}(A < B) = 1/2, \quad \mathbb{P}(B < C) = 3/4, \quad \mathbb{P}(C < A) = 1/2$

Nimamo tranzitivnosti!

Google: paradoks volilca, Condorcet paradox

$A < B < C$
$B < C < A$
$C < A < B$

$\mathbb{P}(A < B) = \mathbb{P}(B < C) = \mathbb{P}(C < A) = 2/3$

4. Dolg s predavanj. Naj bosta X_n in Y_n aperiodični markovski verigi s povrnljivimi stanji.

Ali je (X_n, Y_n) aperiodična? markovska veriga? s povrnljivimi stanji? Seveda po potrebi predpostavite neodvisnost, hehe.

Če imamo neodvisnost, je:

$$p_{(i,j),(k,l)} = p^X_{i,k} \cdot p^Y_{j,l}$$

in imamo markovsko verigo.

Nadalje nam aperiodičnost verig X in Y pove, da sta za $\forall i.\forall j$ od nekega $n \in \mathbb{N}$ dalje $p^X_{i,i}(n), p^Y_{j,j}(n) > 0 \Rightarrow p_{(i,k),(i,k)} = p^X_{i,i} \cdot p^Y_{k,k} > 0$
$\Rightarrow (X_n, Y_n)$ aperiodična.

Spomnimo se: povrnljivost $\Leftrightarrow \mathbb{P}_i^X(\text{nekoč v } i) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p^X_{i,i}(n)$ divergira

Podobno za Y: $\sum_{n=1}^{\infty} p^Y_{j,j}(n)$ divergira.

Oglejmo si vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{(i,j)(i,j)}(n) \overset{\text{neodvisnost}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p^X_{i,i}(n)\, p^Y_{j,j}(n)$$

v splosnem se lahko zgodi, da ta konvergira:
npr. $\sum \frac{1}{n} = \infty$, ampak $\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} < \infty$.

$\boxed{\text{7. januar 2026}}$

1. Najprej se spomnimo nekaj koristnih lastnosti eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke:

- Kakšna je pogojna porazdelitev X glede na pogoj $X > t$?
- Kako je porazdeljen minimum dveh neodvisnih eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljivk?
- Kolikšna je verjetnost, da je omenjeni minimum enak prvi izmed obeh eksponentnih slučajnih spremenljivk?

$X \sim \exp(\lambda)$ ima:

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x > 0$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $x > 0$
- Pogosto raje gledamo $1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$ (preživetvena funkcija)

Velja: $\mathbb{P}(X > t + x \mid X > t) = \dfrac{\mathbb{P}(X > t+x, \cancel{X > t})}{\mathbb{P}(X > t)} = \dfrac{e^{-\lambda(\cancel{t}+x)}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x)$

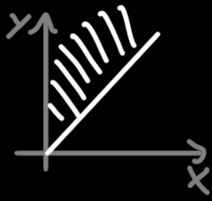
Tej lastnosti pravimo, da je X brez spomina (pretekłost niti malo ne vpliva na porazdelitev).

Imejmo zdaj $X \sim \exp(\lambda)$, $Y \sim \exp(\mu)$ neodvisni. Potem je:

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) > t) = \mathbb{P}(X>t,\ Y>t) \overset{\text{neodvisnost}}{=} \mathbb{P}(X>t)\,\mathbb{P}(Y>t)$$
$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$\Rightarrow \min(X,Y) \sim \exp(\lambda+\mu)$

Kaj pa: $\mathbb{P}(\min(X,Y) = X) = \mathbb{P}(X<Y)$ Po območju:



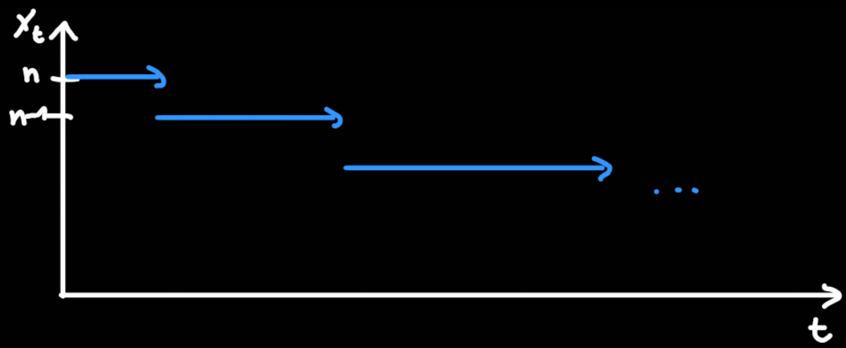
$$= \int_0^\infty dx \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu x}\, dy$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)x} (\lambda+\mu)\, dx$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Uporabno!

Spomnimo se še $\mathbb{E}(\exp(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}$.

<u>Čuden primer</u>: Če imamo dve neodvisni žarnici s časoma delovanja $X, Y \sim \exp(\lambda)$, se bo ena žarnica predvidoma ugasnila po $\mathbb{E}(\min(X,Y)) = \frac{1}{2\lambda}$ časa. Potem pričakujemo, da se bo druga ugasnila šele po nadalje $\frac{1}{\lambda}$ časa.

2. Recimo, da hkrati vklopimo n svetilk. Opazujemo, koliko svetilk v času t sveti. Če to število označimo s X_t, kaj je potem ta X_t in kakšnim zakonitostim ustreza?



Oglejmo si $\mathbb{P}(X_{t+h} = j-1 \mid X_t = j) = ?$

Označimo $T_k :=$ čas delovanja k-te žarnice $\sim \exp(\lambda)$

Potem je $\mathbb{P}(X_{t+h} = j-1 \mid X_t = j) = \mathbb{P}(\min(T_1, \dots, T_j) \le h,$ samo ena žarnica se ugasne v tem času$)$

za majhne h je „nemogoče", da se dve ugasneta v istem času

$$\doteq \mathbb{P}(\min(T_1, \dots, T_j) \le h)$$

$\min(T_1, \dots, T_j) \sim \exp(\lambda)$

$$= 1 - e^{-j\lambda h}$$
$$\doteq 1 - \left(1 - j\lambda h + \tfrac{1}{2!} j^2 h^2 \lambda^2 - \dots\right)$$
$$= j\lambda h + O(h^2)$$

Ker smo se omejili na tako majhne skoke, da ne moreta dve žarnici ugasniti v istem intervalu, lahko gre proces v le dve stanji v tem času: bodisi ostane enak bodisi se zmanjša za 1. Torej je: $\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = j) = 1 - j\lambda h$.
Iz teh verjetnosti dobimo matriko $(P_t)_{i,j}$.

vsota po vrsticah 0

Izkaže se, da matrike P_t generira neka matrika G. Za ti dve matriki velja zveza $\boxed{G = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_t.}$

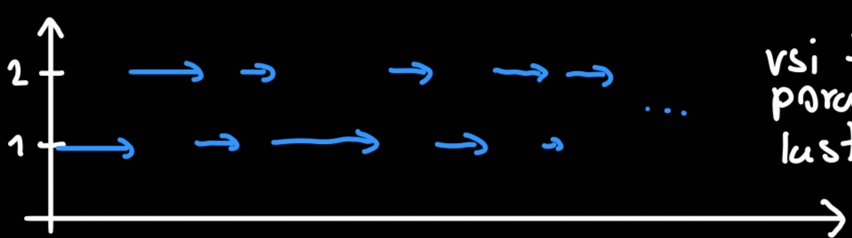
Velja tudi povezava: $\boxed{P_t' = P_t \cdot G = G \cdot P_t}$ Pomembno za izpit!

To je linearni sistem NDE. Rešitev je:

$$\boxed{P_t = C e^{Gt} = e^{Gt}}$$

Pogoj $P_0 = I$ nam da $C = 1$.

3. Poglejte si splošno Markovsko verigo v zveznem času z dvemi stanji. Izpeljite prehodno matriko P_t. Kaj se dogaja, ko čas pošljemo v neskončno?



vsi ti intervali so enako porazdeljeni zaradi Markovske lastnosti

Torej je $G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$ in $P_t = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$

Uporabimo $P_t' = P_t \cdot G$ (pride mnogo lepše kot $G \cdot P_t$):

$$p_{11}'(t) = p_{11}(t)(-\lambda) + \underbrace{p_{12}(t)}_{1 - p_{11}}\mu = p_{11}(t)(-\lambda - \mu) + \mu$$

linearna NDE

Rešimo: $p_{11}(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \Rightarrow C = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

$\hookrightarrow p_{11}(0)=1$

Dobimo:

$$P_t = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

Opazimo: Členi P_t so linearne kombinacije e^{0t} in $e^{-(\lambda+\mu)t}$. Ker je $P_t = e^{Gt}$ so potem lastne vrednosti za G kar 0 in $-\lambda-\mu$.

Ko $t \longrightarrow \infty$: $P_t \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$

Enaki vrstici! Podobno kot stacionarna porazdelitev v diskretnem.

4. Naj bo dan generator $Q = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Izpeljite prehodno matriko P_t. (Ostala vprašanja o tej verigi sledijo kasneje.)

Uporabimo $P_t = e^{Qt}$. Rabimo lastne vrednosti Q:

$$\begin{vmatrix} -9-\lambda & 4 & 5 \\ 3 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda(\lambda+11)(\lambda+6)$$

<u>Pomembno</u>: G ima vedno lastno vrednost 0 in same nepozitivne lastne vrednosti (če je $\lambda > 0$, imamo v verjetnosti $e^{\lambda t} \longrightarrow \infty$, kar je nemogoče, saj je $p_{ij} \in [0,1]$).

Torej $p_{ij}(t) = A_{i,j}e^{0t} + B_{ij}e^{-11t} + C_{ij}e^{-6t}$

<u>Ena možnost</u>: Rešimo s pogoji:

$$p_{ij}(0) = I_{ij}, \quad p_{ij}'(0) = g_{ij}, \quad p_{ij}''(0) = (G^2)_{ij}$$

$\hookrightarrow P_t' = G \cdot P_t$ $\qquad$ $\hookrightarrow P_t'' = G^2 P_t$

<u>Druga možnost</u>: Isto kot prva možnost, le da se znebimo konstantnih členov tako, da izkoristimo dejstvo, da konstante v P predstavljajo matriko, h kateri P konvergira $\Rightarrow$ poiščemo stacionarno porazdelitev za katero velja: $\pi G = 0$.
Tako v sistemu NDE potrebujemo poiskati le še dve konstanti.

<u>Tretja možnost</u>: Dejansko izračunamo e^{tG}:

$$e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n G^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n S J^n S^{-1}}{n!} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

1. Dana je markovska veriga $\{X_t\}_{t\geq 0}$ v zveznem času z generatorjem G.

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Izračunajte P_t.

Kolikšna je verjtetnost, da veriga iz stanja i skoči v stanje j (pogojno na dejstvo, da skoči)? Kaj to pomeni?

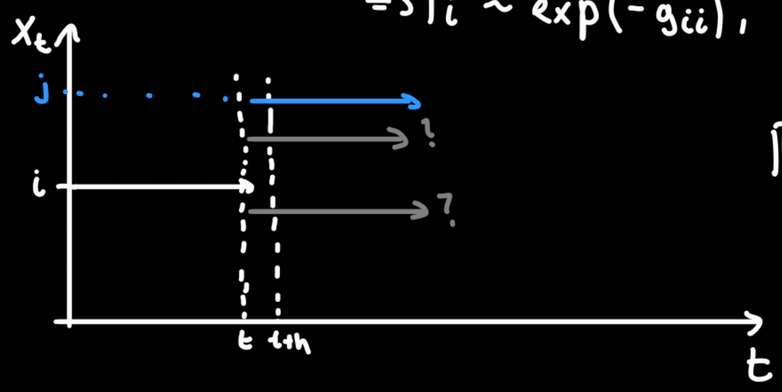
Naj bo $l_i(T) = \int_0^T 1_{(X_t=i)} dt$ čas bivanja v stanju i in $T_i^+ = \inf\{t \geq 0; X_t = i \text{ in } X_{t-} \neq i\}$ čas prvega vstopa v stanje i. Koliko je $E(l_1(T_1^+)|X_0 = 1)$? Kaj pa $E(l_2(T_1^+)|X_0 = 1)$?

Kolikšna je verjtetnost, da iz stanja 2 prej pridemo v 1 kot v 3? Kako bi to naredili splošno (več stanj, prej v množico A kot v B)?

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = i \mid X_t = i) = 1 + g_{ii} h + o(h^2)$$

14. januar 2026

$$\Rightarrow T_i \sim \exp(-g_{ii}), \quad \mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{-g_{ii}}$$



$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = g_{ij} h + o(h^2)$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t+h} \neq i) = \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j, X_t = i, X_{t+h} \neq i)}{\mathbb{P}(X_t = i, X_{t+h} \neq i)}$$

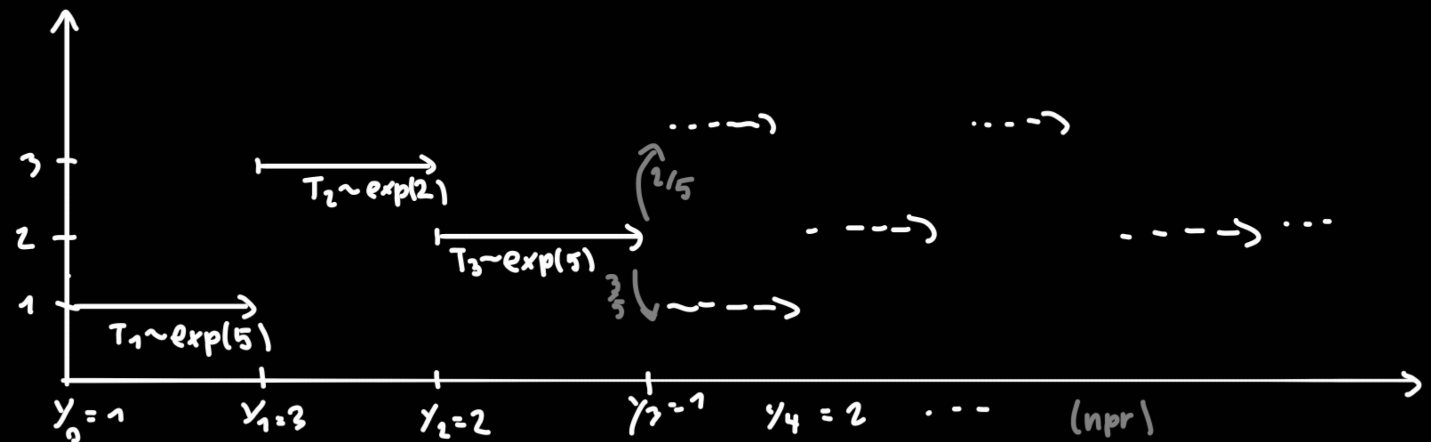
$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j, X_t = i)}{\mathbb{P}(X_{t+h} \neq i, X_t = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_t = i)}{\mathbb{P}(X_t = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i)}{\mathbb{P}(X_{t+h} \neq i \mid X_t = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h}=j \mid X_t=i)}{1-\mathbb{P}(X_{t+h}=i \mid X_t=i)}$$

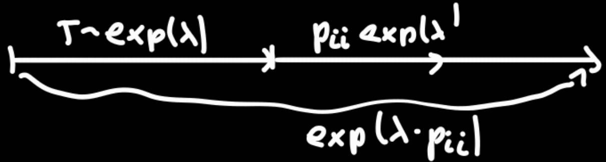
$$= \frac{q_{ij}\, h + o(h^2)}{1-(1+q_{ii}h + o(h^2))}$$

$$= -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$$



$$P_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 5 \\ \lambda_2 &= 5 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

zvezna $\rightsquigarrow$ diskretna $\xrightarrow[\text{če vemo } \lambda_i]{}$ zvezna



Kolikšna je verjetnost, da iz stanja 2 prej pridemo v 1 kot v 3? Kako bi to naredili splošno (več stanj, prej v množico A kot v B)?

$2 \rightarrow 1,\ 2 \rightarrow 3$ obe stanji končni $\Rightarrow \mathbb{P} = p_{21} = 3/5$

V splošnem: lahko gledamo samo diskretno strukturo (čas ni pomemben)

$$h_i := (\text{prej v } A \text{ kot v } B \mid Y_0 = i)$$

pogojujemo na 1. skok

Dobimo velik sistem enačb

Alternativno: lepljenje $\rightsquigarrow$ množici A in B naredimo absorbirajoči (izhodna verjetnost 0)

$P^n \longrightarrow P^\infty$

V zveznem: $T_i \sim \exp(-g_{ii})$

$\mathbb{E}(T_i) = -\frac{1}{g_{ii}} = \infty$

„lepljivo stanje" $\rightsquigarrow$ vrstica 0

$$e^{tG} \rightsquigarrow e^{t\tilde{G}} \qquad \tilde{G} = \begin{array}{c} A \\ \\ B \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & G & (\text{začetek}) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l_i(T) = \int_0^T \mathbb{1}_{(X_t = i)}\, dt, \qquad T_i^+ = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = i \text{ in } X_{t-} \neq i\}$$

$\mathbb{E}(l_1(T_1^+) \mid X_0 = 1) = \frac{1}{5}$ (pričakovan čas prvega bivanja)

$$\mathbb{E}(l_2(T_1^+) \mid X_0 = 1) = \frac{1}{5}\mathbb{E}_2(l_2(T_1^+)) + \frac{4}{5}\mathbb{E}_3(l_2(T_1^+))$$

pogojujemo na 1. skok

$$\mathbb{E}_2(l_2(T_1^+)) = \underset{2\to 1}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5} + \mathbb{E}_3(l_2(T_1^+))\right) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathbb{E}_3(l_2(T_1^+))$$

čas bivanja v 2

$$\mathbb{E}_3(l_2(T_1^+)) = \underset{3\to 2}{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_2(0 + l_2(T_1^+)) + \frac{1}{2}\cdot 0$$

↳ če skočimo v 1, končamo

$$\Rightarrow \mathbb{E}_3(l_2(T_1^+)) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{E}_2(l_2(T_1^+)) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}_1(l_2(T_1^+)) = \frac{3}{20}$$

Kaj pa $\mathbb{E}(l_3(T_1^+) \mid X_1 = 1)$? Enako: pogojevanje na 1. skok.

$$\mathbb{E}_1(l_1(T_1^+)) + \mathbb{E}_1(l_2(T_1^+)) + \mathbb{E}_1(l_3(T_1^+)) = \mathbb{E}_1(T_1^+)$$

↓

V diskretnem $\frac{1}{\pi_1}$ stac. porazd.

<u>Opomba</u>: V zveznem: $\mathbb{E}(T_1^+ \mid X_0 = 1) = -\frac{1}{\pi_1 g_{11}}$ (tega nismo obravnavali)

Lastne vrednosti: $\lambda_1 = 0$ (vedno)

$\lambda_2 = -6$ (uganemo)

$\lambda_3 = \operatorname{tr} G - \lambda_2 - \lambda = -6$

$$\Rightarrow p_{i,j}(t) = A + (B + Ct)e^{-6t}$$

↳ ker imamo dvakratno lastno vrednost

$$p'_{i,j}(t) = -6Be^{-6t} + Ce^{-6t} - 6te^{-6t}$$

$$p''_{i,j}(0) = 36B - 6C - 6C$$

$$\left.\begin{array}{lll} p_{11}(t): & t=0: & 1 = A + B \\ p'_{11}(t): & t=0: & -5 = -6B + C \\ p''_{11}(t): & t=0: & 32 = 36B - 12C \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C = -1/3 \\ B = 7/9 \end{array}$$

$$G^2 = \begin{bmatrix} 32 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{11}(t) = 2/9 + 7/9\, e^{-6t} - 1/3\, te^{-6t}$$

$$P_t = \left[\begin{array}{l} 2/9 + 7/9\, e^{-6t} - 1/3\, te^{-6t} \\ \downarrow \\ 2/9 \\ \downarrow \\ 2/9 \end{array}\right.$$

(tu bi potrebovali izračunat samo dve neznanki