4. MARKOVSKE VERIGE V ZVEZNEM ČASU

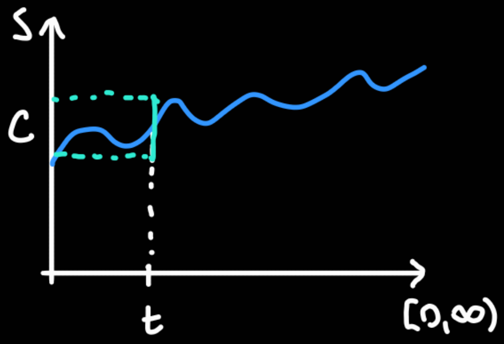
5. januar 2026

<u>Naivna definicija</u>: Slučajni proces v času $[0,\infty)$ z vrednostmi v merljivem prostoru $(S,\mathcal{S})$ je:

(1) družina $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ in vrednostmi v $(S,\mathcal{S})$, t.j. $X_t:\Omega\longrightarrow S$

ali, ekvivalentno

(2) slučajni element $\underline{X}$ na $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ z vrednostmi v $(S^{[0,\infty)},\mathcal{S}^{\otimes[0,\infty)})$, kjer je $S^{[0,\infty)}$ množica vseh preslikav $[0,\infty)\to S$, $\mathcal{S}^{\otimes[0,\infty)}$ pa je σ-algebra na $S^{[0,\infty)}$, generirana z množicami oblike $\{\xi:[0,\infty)\longrightarrow S,\ \xi(t)\in C\}$, kjer je $t\in[0,\infty)$ in $C\in\mathcal{S}$.



Ekvivalentno, $\mathcal{S}^{\otimes[0,\infty)}$ je tudi σ-algebra, generirana z množicami oblike $\{\xi:[0,\infty)\longrightarrow S;\ \xi(t_0)\in C_0,\dots,\xi(t_n)\in C_n\}$, kjer so $t_0,\dots,t_n\in[0,\infty)$ in $C_0,\dots,C_n\in\mathcal{S}$.

Ekvivalenca med (1) in (2) gre prek identifikacije
$$X(\omega)(t)=X_t(\omega).$$

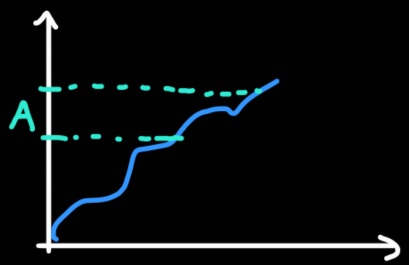
Prek karakterizacije (2) lahko definiramo porazdelitev procesa: to je verjetnostna mera na $(S^{[0,\infty)},\mathcal{S}^{\otimes[0,\infty)})$.

<u>Opazka 4.1:</u> Porazdelitev takega slučajnega procesa je enolično določena že z verjetnostmi
$\mathbb{P}(X_{t_0}\in C_0,\dots,X_{t_n}\in C_n)$; $t_0,\dots,t_n\in[0,\infty)$, $C_0,\dots,C_n\in\mathcal{S}$.

<u>Opazka 4.2:</u> Če je S števna in $\mathcal{S}=2^S$, je $\mathcal{S}^{\otimes[0,\infty)}$ že σ-algebra generirana z množicami oblike $\{\xi:[0,\infty)\longrightarrow S;\ \xi(t)=x\}$,

porazdelitev takega slučajnega procesa pa je enolično določena že z verjetnostmi $\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0,\dots,X_{t_n}=x_n)$; $t_0,\dots,t_n\in[0,\infty)$, $x_0,\dots,x_n\in S$.

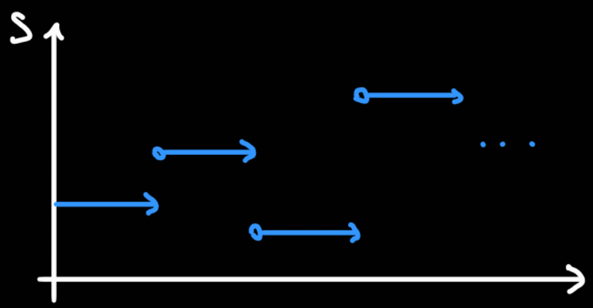
Težava: Čas vstopa v množico A: $T_A := \inf\{t\in[0,\infty)\,;\,X_t\in A\}$. tipično ni merljiv, saj množica



$$\{\omega\in\Omega \mid T_A(\omega)\geq\tau\}=\{\omega\in\Omega \mid \forall t<\tau.\ X_t\notin A\}$$
$$=\bigcap_{t\in[0,\tau)}\{X_t\notin A\}$$

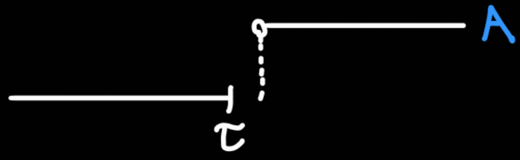
nešteven presek.

Administrativna omejitev: zahtevamo, da za vsak $\omega\in\Omega$ velja, da je preslikava $X(\omega)$ odsekoma konstantna in z desne zvezna v diskretni topologiji na S.



Opazka 4.3: Vstopni časi so tako merljivi, saj je $\{T_A\geq\tau\}=\bigcap_{t\in[0,\tau)\cap\mathbb{Q}}\{X_t\notin A\}$.

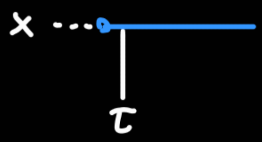
Opazka 4.4: Ne glede na zveznost velja: $T_A\geq\tau \iff \forall t<\tau.\ X_t\notin A$.
Pri zveznosti z desne velja še: $T_A>\tau \iff \forall t\leq\tau.\ X_t\notin A$.



Pri zveznosti z leve pa velja: $T_A\geq\tau \iff \forall t<\tau.\ X_t\notin A$
$$\iff \forall t\leq\tau.\ X_t\notin A$$

Opazka 4.5: Porazdelitev slučajnega procesa na števni množici S, čigar trajektorije so zvezne z desne, je natanko določena že z verjetnostmi $\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0, \dots, X_{t_n}=x_n)$; $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in S$, $t_0, \dots, t_n \in R$, kjer je $R \subseteq [0, \infty)$ vnaprej izbrana povsod gosta množica.

Za poljuben $\tau \in [0, \infty)$ je namreč tedaj



$$\{X_\tau = x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in [\tau, \tau + \frac{1}{n}) \cap R} \{X_t = x\}$$

Diskretni čas: $p_{x,y} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$.

$$\Downarrow$$

Zvezni čas: $p_{x,y}(t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = y \mid X_s = x)$

Zahtevamo še več:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = y \mid X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n) = p_{x_n, y}(t_{n+1} - t_n)$$

brž, ko je $t_{n+1} \geq t_n \geq \dots \geq t_0$ in $\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n) > 0$.

Opazka 4.6: Če velja zgornje in je $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$, je tudi:

- $\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) = p_{x,y}(t)$
- $p_{x,z}(t+s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = z \mid X_0 = x) = \mathbb{P}^{X_0=x}(X_{t+s} = z)$

$$= \sum_{y \in S} \mathbb{P}^{X_0=x}(X_t = y)\, \mathbb{P}^{X_0=x}(X_{t+s} = z \mid X_t = y) \qquad \mathbb{P}^{X_0=x}(X_t = y) > 0$$

$$= \sum_{\substack{y \in S \\ \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) > 0}} \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x)\, \mathbb{P}(X_{t+s} = z \mid X_0 = x, X_t = y)$$

$$= \sum_{\substack{y \in S \\ p_{x,y}(t) > 0}} p_{x,y}(t)\, p_{y,z}(s)$$

Če torej prehodne verjetnosti sestavimo v matrike $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y\in S}$, velja $P(t+s) = P(t)P(s)$, brž ko je $\mathbb{P}(X_0=x) > 0$ za vse $x \in S$.

<u>Opazka 4.7</u>: Če ima proces z desne zvezne trajektorije, so verjetnosti $\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0, \dots, X_{t_n}=x_n)$ v vsaki od spremenljivk $t_1, \dots, t_n$ z desne zvezne: za vsak $\omega \in \Omega$ je namreč indikator $\mathbb{1}(X_{t_0}(\omega)=x_0, \dots, X_{t_n}(\omega)=x_n)$ z desne zvezen v vsaki od spremenljivk $t_0, t_1, \dots, t_k$; nato uporabimo izrek o dominirani konvergenci. Posledično, brž ko je $\mathbb{P}(X_0=x) > 0$, je $p_{x,y}(t) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x)$ z desne zvezna v t za vsak y.

<u>Definicija</u>: **Polgrupa matrik prehodnih verjetnosti** na števni množici S za čas $[0,\infty)$ je družina matrik $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y\in S}$, $t \in [0,\infty)$, za katere velja:

- $\forall x,y \in S.\ \forall t \in [0,\infty).\ p_{x,y}(t) \geq 0$;
- $\forall x \in S.\ \forall t \in [0,\infty).\ \sum_{y\in S} p_{x,y}(t) = 1$;
- $P(0) = I_S$, tj. $p_{x,y}(0) = \mathbb{1}(x=y)$;
- $\forall t,s \in [0,\infty).\ P(t+s) = P(t) + P(s)$;
- za poljubna $x,y \in S$, je $t \mapsto p_{x,y}(t)$ z desne zvezna.

<u>Definicija</u>: **Časovno homogeno markovsko verigo v času $[0,\infty)$** in na diskretni množici stanj S s fiksno začetno porazdelitvijo sestavljajo:

- števna množica S ... **prostor stanj**;
- verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- slučajne spremenljivke X_t, $t \in [0,\infty)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $(S, 2^S)$;
- polgrupa $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y\in S}$, $t \in [0,\infty)$, matrik prehodnih verjetnosti na S za čas $[0,\infty)$.

pri čemer zahtevamo:

- $\mathbb{P}(X_{t_{n+1}}=y \mid X_{t_0}=x_0, \dots, X_{t_n}=x_n) = p_{x_n,y}(t_{n+1}-t_n)$ za poljubne $x_0, \dots, x_n \in S$ in poljubne $0 \le t_0 \le \dots \le t_n \le t_{n+1}$, za katere je $\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0, \dots, X_{t_n}=x_n) > 0$;
- za vsak $\omega \in \Omega$ je preslikava $t \longmapsto (X_t(\omega) : [0,\infty) \longrightarrow S)$ odsekoma konstantna in z desne zvezna.

↳ na končnem intervalu lahko imamo končno točk nezveznosti

Opazka 4.8: Slučajni proces $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ na števni množici S, čigar trajektorije so odsekoma konstantne in z desne zvezne, je markovska veriga za polgrupo $(P(t))_{t\in[0,\infty)}$ natanko tedaj, ko za vse $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$ in $t_0, t_1, \dots, t_n \in R$ velja:
$\mathbb{P}(X_{t_0}=x_0, \dots, X_{t_n}=x_n) = \mathbb{P}(X_{t_0}=x_0)\, p_{x_0,x_1}(t_1-t_0)\, p_{x_1,x_2}(t_2-t_1) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n-t_{n-1})$,
pri čemer je $R \subseteq [0,\infty)$ vnaprej izbrana povsod gosta množica.

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v času $[0,\infty)$ in na diskretni množici stanj s prostim začetnim stanjem sestavljajo:

- števna množica S;
- verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F})$
- verjetnostne mere $\mathbb{P}_x, x \in S$, na $(\Omega, \mathcal{F})$
- $\mathcal{F}/2^S$ - merljive preslikave $X_t : \Omega \longrightarrow S$, $t \in [0,\infty)$
- (z desne zvezna) polgrupa $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y\in S}$, $t \in [0,\infty)$,

pri čemer zahtevamo, da slučajni proces X_t, $t \in [0,\infty)$, pri vsaki od verjetnostnih mer $\mathbb{P}_x$ tvori markovsko verigo na S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}(t)$, njena začetna porazdelitev pa je določena s $\mathbb{P}_x(X_0=x) = 1$.

Opazka 4.9: Velja $p_{x,y}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$.

<u>Definicija</u>: Naravna filtracija, ki pripada procesu X_t, $t \in [0,\infty)$, je $\mathcal{F}_\tau = \sigma(\{X_t \mid t \leq \tau\})$.

<u>Trditev 4.10</u>: Naj bo X_t; $t \in [0,\infty)$, markovska veriga za polgrupo prehodnih verjetnosti $P(t)$, $t \in [0,\infty)$, in $\tau \in [0,\infty)$. Naj bo $B \in \mathcal{F}_\tau$ in $\mathbb{P}(B) > 0$. Pogojno na B je tedaj proces $X_{\tau+t}$; $t \in [0,\infty)$, spet markovska veriga za isto polgrupo. (Vse v kontekstu verig s fiksno začetno porazdelitvijo.)

<u>Dokaz</u>: Preveriti je treba:

$$\mathbb{P}(X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n \mid B) = \mathbb{P}(X_{\tau+t_0} = x_0 \mid B)\, p_{x_0,x_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n - t_{n-1})$$

Pomnožimo s $\mathbb{P}(B)$: (*)

$$\mathbb{P}(\{X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n\} \cap B) = \mathbb{P}(\{X_{\tau+t_0} = x_0\} \cap B)\, p_{x_0,x_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Najprej preverimo za poseben primer $B = \{X_{s_0} = z_0, X_{s_1} = z_1, \ldots, X_{s_m} = s_m\}$; $0 \leq s_0 \leq \cdots \leq s_m \leq \tau$.

$$\mathbb{P}(X_{s_0} = z_0, \ldots, X_{s_m} = z_m, X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n) =$$
$$= \mathbb{P}(X_{s_0} = z_0, \ldots, X_{s_m} = z_m) \cdot p_{x_0,x_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n - t_{n-1})$$
$$\|$$
$$\mathbb{P}(X_{s_0} = z_0)\, p_{z_0,z_1}(s_1 - s_0) \cdots p_{z_{m-1}z_m}(s_m - s_{m-1}) \cdot p_{z_m,x_0}(\tau + t_0 - s_m) \cdot p_{x_0,x_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n - t_{n-1}) \checkmark$$

Kaj pa splošni $B \in \mathcal{F}_\tau$? (*) je ekvivalentna:

$$\cancel{\mathbb{P}(X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n)}\, \mathbb{P}(B \mid X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n) =$$
$$= \cancel{\mathbb{P}(X_{\tau+t_0} = x_0) \cdot p_{x_0,x_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{x_{n-1},x_n}(t_n - t_{n-1})}\, \mathbb{P}(B \mid X_{\tau+t_0} = x_0)$$

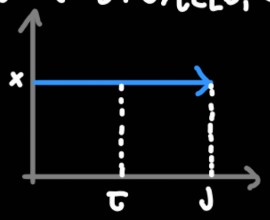
Verjetnostni meri $\mathbb{P}^{X_{\tau+t_0} = x_0, \ldots, X_{\tau+t_n} = x_n}$ in $\mathbb{P}^{X_{\tau+t_n} = x_n}$ se ujemata na vseh dogodkih $B = \{X_{s_0} = z_0, \ldots, X_{s_m} = z_m\}$. Družina teh dogodkov je zaprta za končne preseke in generira $\mathcal{F}_\tau$. Po enoličnosti verjetnosti (Dynkinovi lemi), se morata lemi ujemati za vse $B \in \mathcal{F}_\tau$. ▨

12. januar 2025

<u>Posledica 4.11</u>: Porazdelitev markovske verige v zveznem času je natanko določena že z začetno porazdelitvijo in polgrupo prehodnih verjetnosti $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y \in S}$, $t \in [0,\infty)$.

<u>Definicija</u>: Čas prvega skoka: $J := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \neq X_0\} \in [0, \infty]$.

V resnici je vedno $J > 0$, torej $\exists \tau > 0.\ \mathbb{P}(J > \tau) > 0$. Če je $\underbrace{\mathbb{P}_x(J > \tau)}_{= \mathbb{P}_x(\forall t \in [0,\tau].\ X_t = x)} > 0$,
je $(X_{\tau+t})_{t \in [0,\infty)}$ po lastnosti Markova pri $\mathbb{P}_x^{J>x}$ spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo δ_x.



Čas prvega skoka v novi verigi je enak $J - \tau$.

Sledi: $\mathbb{P}_x^{J>\tau}(J - \tau > \sigma) = \mathbb{P}_x(J > \sigma)$.

$$\mathbb{P}_x^{J>\tau}(J-\tau>\sigma) = \mathbb{P}_x(J > \sigma + \tau \mid J > \tau) = \frac{\mathbb{P}_x(J > \sigma + \tau)}{\mathbb{P}_x(J > \tau)}$$

Sledi $\mathbb{P}_x(J > \sigma + \tau) = \mathbb{P}_x(J > \sigma)\, \mathbb{P}_x(J > \tau)$.

$$\mathbb{P}_x(J > 1) = \left(\mathbb{P}_x\left(J > \tfrac{1}{n}\right)\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}_x\left(J > \tfrac{m}{n}\right) = \left(\mathbb{P}_x(J > 1)\right)^{m/n}$$

lahko logaritmiramo

$$\forall t \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q} \quad \mathbb{P}_x(J > \tau) = \left(\mathbb{P}_x(J > 1)\right)^{\tau} \Rightarrow \mathbb{P}_x(J > 1) > 0$$

Ker je $\tau \longmapsto \mathbb{P}_x(J > \tau)$ z desne zvezna (osnovna lastnost verjetnosti), mora to veljati za vse $\tau \in [0, \infty)$.

Intenzivnost skoka (jump rate) iz stanja x:

$$\lambda(x) := -\ln \mathbb{P}_x(J > 1) \in [0, \infty)$$

<u>Opazka 4.12</u>: Ker je $J > 0$, $\exists \tau > 0.\ \mathbb{P}(J > \tau) > 0$.

Zgoraj smo dokazali:

<u>Trditev 4.13</u>: Čas prvega skoka je pri vsaki meri $\mathbb{P}_x$ bodisi porazdeljen eksponentno bodisi skoraj gotovo neskončen.

<u>Definicija</u>: Prehodne verjetnosti skokov (jump transition propabilities)

$$\bar{p}_{xy} = \begin{cases} \mathbb{P}_x^{J<\infty}(X_J = y); & \lambda(x) > 0, \\ \mathbb{1}(x = y); & \lambda(x) = 0. \end{cases}$$

Opazka 4.14: Matrika prehodnih verjetnosti je stohastična $(\forall x,y.\ \bar{p}_{x,y} \geq 0.\ \forall x.\ \sum_y \bar{p}_{x,y} = 1)$ in velja

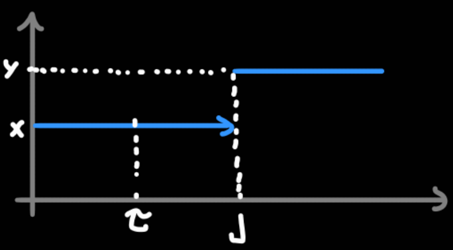
$$p_{x,x} = \begin{cases} 0; & \lambda(x) > 0, \\ 1; & \lambda(x) = 0. \end{cases}$$

Trditev 4.15: Če je $\lambda(x) > 0$, sta slučajni spremenljivki J in X_J pri $\mathbb{P}_x^{J<\infty}$ neodvisni.

Dokaz: $\mathbb{P}_x^{\tau<J<\infty}(X_J = y) = \mathbb{P}_x^{J<\infty}(X_J = y)$

$J = \tau + J - \tau$

asimetrična karakterizacija neodvisnosti



$$\mathbb{P}_x^{J<\infty}(J > \tau, X_J = y) = \mathbb{P}_x^{J<\infty}(J > \tau)\, \mathbb{P}_x^{J<\infty}(X_J = y)$$ ■

Lema 4.16: Naj bo $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$; $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ markovska veriga s polgrupo prehodnih verjetnosti $P(t) = [p_{x,y}(t)]_{x,y\in S}$. Naj bo $\lambda(x) > 0$. Pri meri $\mathbb{P}_x^{\tau<J<\infty, X_J=y}$ je tedaj $(X_{J+t})_{t\in[0,\infty)}$ markovska veriga z začetno porazdelitvijo δ_y in istimi prehodnimi verjetnostmi.

↑ Diracova mera

Dokaz: Dovolj bo za poljubne $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \in S$ in $y_0, \dots, y_n \in S$ dokazati:

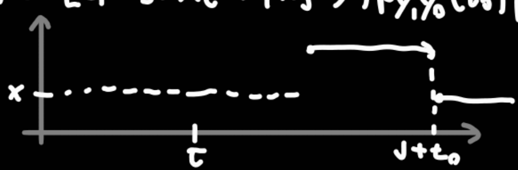
$X_0 = y$

$$\mathbb{P}^{\tau<J<\infty, X_J=y}(X_{J+t_0} = y_0, \dots, X_{J+t_n} = y_n) = \mathbb{P}_y^{J<\infty}(X_{t_0} = y_0, \dots, X_{t_n} = y_n).$$

$$= p_{y,y_0}(t_0)\, p_{y_0,y_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{y_{n-1},y_n}(t_n - t_{n-1})$$

$$\mathbb{P}_x^{J<\infty}(\forall t \in [0,\tau].\ X_t = x,\ X_J = y.\ X_{J+t_0} = y_0, \dots, X_{J+t_n} = y_n) =$$
$$= \mathbb{P}_x^{J<\infty}(\forall t \in [0,\tau].\ X_t = x, X_J = y)\, p_{y,y_0}(t_0)\, p_{y_0,y_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{y_{n-1},y_n}(t_n - t_{n-1})$$

Naj bo $N \in \mathbb{N}_0$.



$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(k = 0, 1, \dots, \lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor : X_{k\cdot 2^{-N}} = x;\ k = \lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + 1, \dots, \lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + m\ X_{k\cdot 2^{-N}} = x,$$
$$X_{\lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + m + 1} = y,\ X_{\lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + m + 1 + t_0} = y_0, \dots, X_{\lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + m + 1 + t_n} = y_n)$$

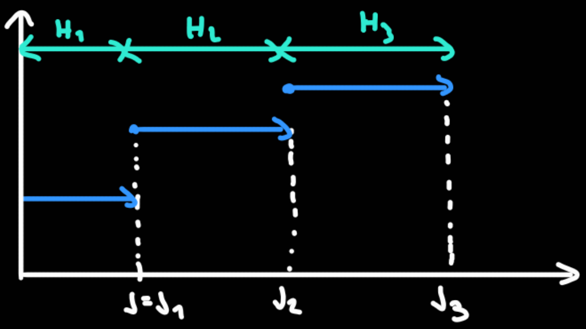
"diskretizacija" diskretiziramo

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (p_{x,x}(2^{-N}))^{\lfloor \tau \cdot 2^N \rfloor + m} \cdot p_{x,y}(2^{-N})\, p_{y,y_0}(t_0) \cdot p_{y_0,y_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{y_{n-1},y_n}(t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\big(k=0,1,\dots,\lfloor \tau\cdot 2^N\rfloor : X_{k\cdot 2^{-N}}=x;\ k=\lfloor\tau\cdot 2^N\rfloor+1,\dots,\lfloor\tau\cdot 2^N\rfloor+m : X_{k\cdot 2^{-N}}=x,$$
$$X_{\lfloor\tau\cdot 2^N\rfloor+m+1}=y\big)\cdot p_{y,y_0}(t_0)\cdot p_{y_0,y_1}(t_1-t_0)\cdots p_{y_{n-1},y_n}(t_n-t_{n-1})$$

V limiti, ko gre $N\longrightarrow\infty$, zaradi desne zveznosti prvi izraz konvergira proti levi strani, zadnji izraz pa proti desni strani želene identitete. (To je ideja dokaza.) ▨

Nasledki: Nadaljevanje brez dokazov.



$J_0=0\le J_1\le J_2\le J_3 \dots$ časi skokov

$H_1, H_2,\dots$ časi bivanj/zadrževanj

$H\dots$ holding times

$\lambda(x_0),\lambda(x_1),\dots,\lambda(x_{n-1})>0$:

$$\mathbb{P}(H_1>\tau_1,\ X_{J_1}=x_1,\dots,H_n>\tau_n,\ X_{J_n}=x_n) = e^{-\lambda(x_0)}\,\overline{p}_{x_0,x_1}\cdot e^{-\lambda(x_1)}\,\overline{p}_{x_1,x_2}\cdots e^{-\lambda(x_{n-1})}\,\overline{p}_{x_{n-1},x_n}$$

Če definiramo vpeto skočno verigo $\overline{X}_0 := X_0,\ \overline{X}_1 = X_{J_1},\dots$; brž ko je $J_i=\infty$, pa naj bo $\overline{X}_i=\overline{X}_{i-1}$.

Velja tudi

$$\mathbb{P}_{x_0}(H_1>\tau_1,\ \overline{X}_1=x_1,\dots,H_n>\tau_n,\ \overline{X}_n=x_n) = e^{-\lambda(x_0)}\cdot\overline{p}_{x_0,x_1}\cdots e^{-\lambda(x_{n-1})}\,\overline{p}_{x_{n-1},x_n}$$

Sledi, da je $\overline{X}_0,\overline{X}_1,\dots$ markovska veriga v diskretnem času, ki ima pri $\mathbb{P}_{x_0}$ začetno porazdelitev δ_{x_0}. Poleg tega pa so pogojno na $\overline{X}_1=x_1,\dots,\overline{X}_n=x_n$ časi zadrževanja $H_1,\dots,H_n$ neodvisni s $H_k\sim Exp(\lambda(x_{k-1}))$ za $k=1,2,\dots,n$. Ob dogovoru, da je $T\sim Exp(0) \Leftrightarrow \mathbb{P}(T=\infty)=1$.

Pod določenimi pogoji, npr. če je stanj končno mnogo, velja:

$p_{x,y}(h)$ (desni odvod)

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbb{P}_x(X_h=y)-\mathbb{1}(x=y)}{h} = q_{x,y} := \begin{cases}\lambda(x)\cdot\overline{p}_{x,y}\ ; & x\neq y\\ -\lambda(x)\sum_{z\in S,\ z\neq x}\overline{p}_{x,z}\ ; & y=x\end{cases}$$

Matriki $Q=[q_{x,y}]_{x,y}$ pravimo infinitezimalni generator verige.

Velja še: $\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q = QP(t)$.
Če je stanj končno mnogo, je kar $P(t) = \exp(tQ)$.

Porazdelitev procesa je torej enolično določena že z začetno porazdelitvijo in generatorjem.