3. MARKOVSKE VERIGE S PROSTIM ZAČETNIM STANJEM

3.1. Osnovni pojmi

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na števni množici stanj s prostim začetnim stanjem sestavljajo:

- števna množica S - množica stanj;
- merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$;
- na tem merljivem prostoru verjetnostne mere $\mathbb{P}_x$; $x \in S$;
- $\mathcal{F}/2^S$ merljive preslikave $X_0, X_1, \ldots : \Omega \longrightarrow S$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}$; $x, y \in S$, pri čemer zahtevamo $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x, y \in S$ in $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.
- slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots$ pri vsaki od verjetnostnih mer $\mathbb{P}_x$ tvorijo markovsko verigo na S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$; $x, y \in S$, njena začetna porazdelitev pa je določena s $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Opazka 3.1: Iz opazke 2.2 sledi, da za vsako stohastično matriko $P \in [0,1]^{S \times S}$ obstaja markovska veriga s prostim začetnim stanjem in prehodno matriko P ($X_0, X_1, \ldots$ definiramo na kanoničnem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}) := (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{S}^{\otimes \mathbb{N}_0})$ produktna σ-algebra

Iz opazke 2.1 pa sledi, da je porazdelitev procesa $X_0, X_1, \ldots$ pri $\mathbb{P}_x$ natančno določena z x in prehodno matriko P.

<u>Primer</u> [kockarjev bankrot/propad]:

Kockar ima na začetku premoženje velikosti $a \in \mathbb{N}$, želi pa imati premoženje $b > a$. Dokler ima premoženje $k \in \{1, \dots, b-1\}$, stavi eno enoto. Z verjetnostjo p pridobi, z verjetnostjo $1-p$ pa izgubi eno enoto. Kolikšna je verjetnost, da dobi željeno premoženje b?

To modeliramo z markovsko verigo na $S := \{0, 1, \dots, b\}$, ki jo definirajo prehodne verjetnosti:

absorbirajoče stanje

$p_{0,0} = 1, \quad p_{b,b} = 1$

20. oktober 2025

$p_{k,k+1} = p \quad , \quad p_{k,k-1} = 1-p \quad$ za $k = 1, 2, \dots, b-1$

$T_k := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_n = k\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$w_a := \mathbb{P}_a(T_b < \infty) = ? \qquad w_0 = 0, \quad w_b = 1$

$a = 1, \dots, 2, \dots, b-1$:

$$w_a = \mathbb{P}_a(X_1 = a+1)\, \mathbb{P}_a(T_b < \infty \mid X_1 = a+1) + \mathbb{P}_a(X_1 = a-1)\, \mathbb{P}_a(T_b < \infty, X_1 = a-1)$$

$$\mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = a}, X_1 = a+1) = \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = a)}_{1} \cdot \underbrace{p_{a,a+1}}_{p}$$

$$w_a = p\, \mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } X_2 = b \text{ ali} \cdots \mid X_1 = a+1)$$
$$+ (1-p)\, \mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \cdots \mid X_1 = a-1)$$

Po trditvi 2.4. je pogojno na dogodek $\{X_1 = a+1\}$ ali na dogodek $\{X_1 = a-1\}$, proces $X_1, X_2, \dots$ spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo skoncentrirano $a+1$ oziroma $a-1$.
To pa je tudi proces $X_0, X_1, X_2, \dots$ pri verjetnostni meri $\mathbb{P}_{a+1}$ oz $\mathbb{P}_{a-1}$.

Iz enoličnosti (opazka 2.1) pa sledi, da se pogojna porazdelitev procesa $X_1, X_2, \ldots$ glede na $\{X_1 = a+1\}$ oz. $\{X_1 = a-1\}$ (pri $\mathbb{P}_a$) ujema z brezpogojno porazdelitvijo procesa $X_0, X_1, \ldots$ pri $\mathbb{P}_{a+1}$ oz. $\mathbb{P}_{a-1}$.

$$\begin{aligned} w_a &= p \cdot \mathbb{P}_{a+1}(X_0 = b \text{ ali } X_1 = b, \ldots) + (1-p)\mathbb{P}_{a-1}(X_0 = b \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \ldots) \\ &= p\, \mathbb{P}_{a+1}(T_b < \infty) + (1-p)\mathbb{P}_{a-1}(T_b < \infty) \\ &= p\, w_{a+1} + (1-p) w_{a-1} \end{aligned}$$

(Zveza je očitna, vendar je v ozadju veliko teorije. To je lahko vprašanje na ustnem izpitu.)

V izogib računanja, se omejimo na $p = 1/2$.

$$w_0 = 1, \quad w_b = 1, \quad w_a = \frac{1}{2}(w_{a+1} - w_{a-1}) \quad \text{za } a = 1, \ldots, b-1$$

$$w_{a+1} - w_a = w_a - w_{a-1}$$

$w_0, w_1, w_2, \ldots$ je torej aritmetično zaporedje $\Rightarrow w_a = \frac{a}{b}$

Na vajah: izračun za splošni p.

Podobno za verjetnost bankrota $r_a := \mathbb{P}_a(T_0 < \infty)$ dobimo $r_0 = 1$, $r_b = 0$, $r_{a+1} - r_a = r_a - r_{a-1}$. Sledi $r_a = \frac{b-a}{b}$.
Opazimo, da je $r_a + w_a = 1$.

$$\mathbb{P}_a(T_0 < \infty) + \mathbb{P}_a(T_b < \infty) = 1$$

Vemo še, da je $\mathbb{P}_a(T_0 < \infty \text{ in } T_b < \infty) = 0$. Sledi $\mathbb{P}_a(T_0 < \infty \text{ ali } T_b < 1) = 1$.

$\pi(x) \equiv \pi(\{x\})$, zloraba notacije, naredimo identifikacijo
$\pi \equiv [\pi(s_1), \pi(s_2), \ldots, \pi(s_m)]$

Iz markovske verige s prostim začetnim stanjem in verjetnostne mere π na S dobimo slučajni proces

$X_0, X_1, \dots$ z $X_0 \sim \pi$, če privzememo verjetnostno mero:

$$\mathbb{P}_\pi(A) := \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{P}_x(A).$$

DV: to je spet verjetnostna mera (zamenjava vrstnega reda seštevanja).

Porazdelitev tega procesa pri $\mathbb{P}_\pi$ je enolično določena s π in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, saj je porazdelitev procesa pri $\mathbb{P}_x$ dobčena že z x in prehodnimi verjetnostmi (opazka 3.1).

<u>Lema 3.2</u>: Naj bodo verjetnostne mere $\mathbb{P}_x$ in $\mathbb{P}_\pi$ podane tako kot zgoraj. Če sta A in B dogodka, $q \geq 0$ in $\mathbb{P}_x(A) = q \cdot \mathbb{P}_x(b)$ za vse $x \in S$, je tudi $\mathbb{P}_\pi(A) = q \mathbb{P}_\pi(b)$.

<u>Dokaz</u>: $\mathbb{P}_\pi(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{P}_x(A) = \sum \pi(x) q \mathbb{P}_x(B) = q \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{P}_x(B)$
$= q \mathbb{P}_\pi(B)$. ▨

<u>Posledica 3.3</u>: Pod zgornjimi pogoji je $X_0, X_1, \dots$ pri $\mathbb{P}_\pi$ prav tako markovska veriga, in sicer s fiksno začetno porazdelitvijo π in istimi prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$.

<u>Dokaz</u>: $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \cdot p_{x_n, x_{n+1}}$

↳ lahko zamenjamo s π (lema 3.2) ▨

<u>Primer</u>: vreme

pretežno jasno

pretežno oblačno

dež

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} [1\ 0\ 0]\,P \\ [0\ 1\ 0]\,P \\ [0\ 0\ 1]\,P \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.29 & 0.16 \\ 0.3 & 0.46 & 0.24 \\ 0.3 & 0.37 & 0.33 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.332 & 0.193 \\ 0.35 & 0.408 & 0.243 \\ 0.35 & 0.381 & 0.269 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.400586 & 0.371135 & 0.228279 \\ 0.399609 & 0.371626 & 0.228764 \\ 0.399609 & 0.371621 & 0.228770 \end{bmatrix}$$

Opazka 3.4: Robne porazdelitve π_n so pri vsaki meri $\mathbb{P}_\pi$ enolično določene s prehodno matriko – velja $\pi_n = \pi P^n$. Pravimo jim *inducirane porazdelitve*.

Definicija: Porazdelitev π^* je *stacionarna* ali *invariantna* za markovsko verigo s prostim začetnim stanjem, če se z njo ujemajo vse pripadajoče inducirane porazdelitve. Ekvivalentno, če je $\pi^* P = \pi^*$ oziroma, če je π^* levi lastni vektor matrike P za lastno vrednost 1.

Opazka 3.5: Število 1 je lastna vrednost vsake matrike, saj ima desni lastni vektor $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Primer: (vreme)

$$\pi^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*]$$

$$\pi^*(P - I) = 0$$

$$P - I = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Imamo sistem treh enačb $\rightsquigarrow$

$$p_2^* = \frac{13}{8} p_3^*$$

$$p_1^* = \frac{7}{4} p_3^*$$

Če želimo, da je π^* verjetnostna mera, mora biti $\pi^* \mathbb{1} = 1$.

$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \quad \Rightarrow \quad p_3^* = \frac{8}{35}$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} \frac{14}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0.4 & 0.371429 & 0.228571 \end{bmatrix}$$

podobno vrsticam matrike P^{10}

Kaže torej, da je $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi^* \\ \pi^* \\ \pi^* \end{bmatrix}$ oziroma $\lim\limits_{n\to\infty} \pi P^n = \pi^*$ za vsako začetno porazdelitev π.

$$\det(P - I - \lambda I) = \det(P - (\lambda+1) I)$$

$$= \begin{vmatrix} -0.3-\lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0.1 \\ -\lambda & -0.4-\lambda & 0.2 \\ -\lambda & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & -0.4-\lambda & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.6-\lambda & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[(\lambda + 0.6)^2 - 0.1^2 \right] =$$

$$= -\lambda(\lambda+0.5)(\lambda+0.7)$$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_1 = -0.5,\ \lambda_2 = -0.7$

Lastne vrednosti matrike P: $1, 0.5, 0.3$

Naj bosta v_2 in v_3 leva lastna vektorja za lastni vrednosti λ_2+1 in λ_3+1.

$$V := \mathrm{Lin}(v_2, v_3)$$

Za vsak $v \in V$, je spet $vP \in V$ in velja

$$\|vP\| \leq 0.5\|v\|$$

Poleg tega pa za vsak $v \in V$ velja $v\mathbb{1} = 0$.

Vemo: $$P\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

$$v_2\mathbb{1} = v_2 P\mathbb{1} = 0.5 v_2 \mathbb{1} \Rightarrow v_2\mathbb{1} = 0.$$

Podobno $v_3\mathbb{1} = 0 \Rightarrow \forall v \in V.\ v\mathbb{1} = 0.$

Če je π verjetnostna porazdelitev na $S = \{1, 2, 3\}$, obstajata tak $a \in \mathbb{R}$ in tak $v \in V$, da je $\pi = a \cdot \pi^* + v$.

$$\underbrace{\pi\mathbb{1}}_{1} = a\underbrace{\pi^*\mathbb{1}}_{1} + \underbrace{v\mathbb{1}}_{0}$$

$\Rightarrow a = 1,\ \pi = \pi^* + v$

$$\pi P^n = \pi^* P^n + v P^n$$
$$= \pi^* + v P^n$$

$$\|vP^n\| \leq 0.5 \cdot \|v\|$$

Torej je $\lim_{n\to\infty} \pi P^n = \pi^*$.

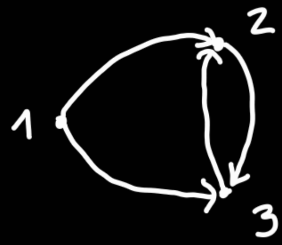
Takemu obnašanju pravimo ergodičnost.

Primer:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P - I = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$-\tfrac{1}{2} p_1^* = 0 \qquad \cancel{\tfrac{1}{4} p_1^*} - \tfrac{1}{4} p_2^* + \tfrac{1}{2} p_3^* = 0$$

$$\cancel{\tfrac{1}{4} p_1^*} + \tfrac{1}{4} p_2^* - \tfrac{1}{2} p_3^* = 0$$



$$\Rightarrow p_2^* = 2 p_3^* \Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Dejstvo, da je $p_1^* = 0$, je posledica minljivosti stanja 1:

$$\mathbb{P}_1(T_1^+ = \infty) = \mathbb{P}_1(\min\{n = 1, 2, 3, \dots ; X_n = 1\} = \infty)$$
$$= \mathbb{P}_1(X_n \neq 1 \text{ za vse } n = 1, 2, 3, \dots) > 0$$

Izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev. Dokaz po izreku 3.49.

Vemo: 1 je lastna vrednost prehodne matrike P, torej obstaja levi lastni vektor; obstaja tak π^*, da je $\pi^* P = \pi^*$.

Če je $\pi^* \mathbb{1} \neq 0$, lahko π^* izberemo tako, da bo $\pi^* \mathbb{1} = 1$. Ni pa rečeno, da so vse komponente vrstičnega vektorja nenegativne! (To želimo dokazat.)

Perron-Frobeniusov izrek: Vsaka matrika z nenegativnimi komponentami ima tako realno lastno vrednost r, da za poljubno lastno vrednost λ velja $|\lambda| \leq r$.

Nadalje za lastno vrednost r obstaja lastni vektor z nenegativnimi komponentami.
Dokaz opuščamo. Zgornje bomo dokazali z verjetnostnimi metodami.

<u>Primer</u>: enostavni slučajni sprehod na $S := \mathbb{Z}$

$$p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = 1/2$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i^* p_{ij} = \pi_j^*$$

$$\pi_j^* = \frac{1}{2}\left(\pi_{j+1}^* + \pi_{j-1}^*\right)$$

Števila π_j^*, $j \in \mathbb{Z}$, torej tvorijo aritmetično zaporedje. Če želimo, da je $\pi_j^* > 0$ za vse $j \in \mathbb{Z}$, morajo biti vsa števila π_j^* enaka. Nikoli se ne seštejejo v 1.
$\Rightarrow$ Invariantna porazdelitev ne obstaja.

πP pa lahko izračunamo za kateri koli vrstični vektor z vrednostmi v $[0, \infty]$.

"posplošena"
Matrika P predstavlja operator na množici pozitivnih mer na S.

$$\pi \longmapsto \pi P$$

Vsaki pozitivni meri π lahko priredimo inducirane mere $\pi_n = \pi P^n$. Pozitivna mera π je invariantna, (ne uporabljamo stacionarna) če je $\pi^* P = \pi^*$.
Enostavni slučajni sprehod ima invariantne mere $\pi^*(k) = a$ za vse k, kjer je $a \in [0, \infty]$ fiksen.

Od zadnjič: $\boxed{22.\ \text{oktober } 2025}$

π: vrstični vektor $\equiv$ (verjetnostna) mera na S

πP = porazdelitev sl. sprem. X_1 pri verj. meri $\mathbb{P}_\pi$

oz. pri $X_0 \sim \pi$ (opazka 3.4)

$$\delta_x \equiv \begin{array}{c} [0 \cdots 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} \ 0 \cdots 0] \end{array}$$

$\delta_x P$ = porazdelitev slučajne spr. X_1 pri $\mathbb{P}_x$

Kaj pa pomeni Ph? $Ph = ?$

Opazka 3.7: πh ustreza pričakovani vrednosti $\mathbb{E}[h(X)]$, kjer $X \sim \pi$. h preizkusna funkcija

Ph je stolpčni vektor iz $\mathbb{E}_x[h(X_1)]$ za vse možne $x \in S$.

$\delta_x Ph \equiv \mathbb{E}_x[h(X_1)]$

pričakovana vrednost pri $\mathbb{P}_x$

$(\underbrace{\delta_x P}_{X_1})h$

$\delta_x(Ph)$?

3.2. Krepka lastnost Markova

Izrek 3.8 [krepka lastnost Markova]: sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3

Naj bo:

- $X_0, X_1, \dots$ markovska veriga na množici S s prostim začetnim stanjem in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$
- π verjetnostna mera na S
- T čas ustavljanja za $X_0, X_1, \dots$ oz. pripadajočo naravno filtracijo $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2, \dots$
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$
- ρ pogojna porazdelitev sl. sprem. X_T glede na B pri $\mathbb{P}_\pi$ (strogo gledano, sl. sprem. Y, ki je na dogodku $\{T < \infty\}$ enaka X_T) in zožena na ...

Pogojno na B je tedaj $X_T, X_{T+1}, \dots$ markovska veriga z začetno porazdelitvijo ρ in istimi prehodnimi verjetnostmi za poljubno množico $D \in (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0}$ velja:

$$\mathbb{P}_\pi^B\left[(X_T, X_{T+1}, \dots) \in D\right] = \mathbb{P}_\rho\left[(X_0, X_1, \dots) \in D\right].$$

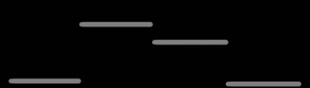
<u>Dokaz:</u> sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3. $\boxtimes$

$\underset{\text{osnovno}}{\mathbb{P}(X \in D)}$ $\underset{\text{ekvivalentno}}{\overset{\text{nekako}}{\approx}}$ $\underset{\text{bolj fleksibilno}}{\mathbb{E}[h(X)]}$ $\Big\}$ radi bi rezulta v desni obliki

„Standardna mašinerija:"

$$\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_D(X)\right], \text{ kjer je } \mathbb{1}_D(x) = \mathbb{1}(x \in D) = \begin{cases} 1; & x \in D \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Z uporabo linearnosti posplošimo z indikatorjev na enostavne funkcije h:



enostavne $\leftrightarrow$ stopničaste

Z uporabo izreka o monotoni/kombinirani konvergenci (teorija mere) posplošimo na želeni razred funkcij h.

Opazka 3.9: Če je $\mathbb{P}_\pi(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{P}_\pi(A)$, tudi za poljubno omejeno slučajno spremenljivko Y velja
$$\mathbb{E}_\pi(Y) = \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{E}_x(Y).$$
Med drugim je: $\pi P h = \mathbb{E}_\pi[h(X_1)]$.

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za poljubno omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0} / \mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo funkcijo h velja zveza:
$$\mathbb{E}_\pi^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = \mathbb{E}_P[h(X_0, X_1, \dots)]$$

Dokaz: „Standardna mašinerija" teorije mere.

Opazka 3.11: Če je vselej $T < \infty$, dogodki oblike
$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \cap \mathcal{F}_n$, tvorijo σ-algebro. (DV)

V splošnem pa to velja za dogodke oblike
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{T = n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, za $\mathcal{F}_\infty$ pa lahko vzamemo poljubno σ-algebro, ki vsebuje vse $\mathcal{F}_n$.

[Če je $T = \infty$, ni zaprtosti za komplemente v 1. primeru].

Definicija: Za merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$, filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ in čas ustavljanja T glede na to filtracijo označimo z $\mathcal{F}_T$ σ-algebro dogodkov oblike
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{T_n = n\} \cap B_n,$$
kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in $B_\infty \in \mathcal{F}$.

Opazka 3.12: Če je T konstanten $(T=n<\infty)$, se definiciji ujemata.

Trditev 3.13: T čas ustavljanja

$$\mathcal{F}_T = \{A\in\mathcal{F} \mid \forall n\in\mathbb{N}_0 .\ A\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n\}$$
$$= \{A\in\mathcal{F} \mid \forall n\in\mathbb{N}_0 .\ A\cap\{T\leq n\}\in\mathcal{F}_n\}$$

Dokaz: Če je $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}\{T=n\}\cap \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{B_n}}$, je

$$A\cap\{T=n\} = \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{B_n}}\cap \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{T=n\}}} \in\mathcal{F}_n \qquad \mathcal{F}_\infty=\mathcal{F}$$

čas ustavljanja

Če za vse $n\in\mathbb{N}_0$ velja $A\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$, lahko postavimo $B_n := A\cap\{T=n\}$, $B_\infty := A\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n$.

$$\subseteq\{T=\infty\}$$

Nadalje je: $A\cap\{T\leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\underbrace{(A\cap\{T=k\})}_{\in\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_n}$

$$A\cap\{T=n\} = \underbrace{(A\cap\{T\leq n\})}_{\mathcal{F}_n\in}\setminus\underbrace{(A\cap\{T\leq n-1\})}_{\substack{\in\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n \text{ za } n=1,2,\dots \\ =\emptyset\in\mathcal{F}_n \text{ za } n=0}} \qquad \blacksquare$$

Trditev 3.14: Če je $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ naravna filtracija za slučajni proces $X_0, X_1, \dots$ z vrednostmi v merljivem prostoru $(S,\mathcal{S})$ in T čas ustavljanja za to filtracijo oz. proces, je slučajna spremenljivka

$$X^* = \begin{cases} X_T\ ; & T<\infty \\ \text{karkoli } \mathcal{F}/\mathcal{S} \text{ merljivega}\ ; & \text{sicer}\end{cases}$$

$\mathcal{F}_T/\mathcal{S}$ merljiva.

Dokaz: Za vsak $C \in S$ moramo dokazati, da je

$$\{X^* \in C\} = \{\omega \in \Omega \mid X^*(\omega) \in C\} = (X^*)^{-1}(C) \in \mathcal{F}(T).$$

Ekvivalentno, $\{X^* \in C\} \in \mathcal{F}$ in $\{X^* \in C, T = n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$\{X^* \in C, T = n\} = \{\overset{\mathcal{F}_n}{X_n \in C}, \overset{\mathcal{F}_n}{T = n}\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$$

Nadalje je

$$\{\underbrace{X^* \in C}_{\in \mathcal{F}}, \underbrace{T = \infty}_{\in \mathcal{F}}\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X^* \in C\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{X^* \in C, T = n\} \in \mathcal{F}$$

∎

27. oktober 2025

Iz trditve 3.13 sledi

Izrek 3.10': Pod predpostavkami izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0} / \mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo funkcijo h in vsak $\underbrace{B \in \mathcal{F}_T}_{\text{Sprememba od 3.10}}$, za katerega je $\mathbb{P}(B) > 0$, velja zveza:

$$\mathbb{E}_\pi^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = \mathbb{E}_\rho[h(X_0, X_1, \dots)],$$

kjer je ρ porazdelitev sluč. sprem. X_T pri $\mathbb{P}_\pi^B$.

Definicija: Za dogodek B s $\mathbb{P}(B) > 0$ in slučajno spremenljivko X z $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ definirajmo:

- $\mathbb{E}^B(X) :=$ pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X pri $\mathbb{P}^B$
- $\mathbb{E}(X \mid B) := \dfrac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$

Trditev 3.15: Brž ko je $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, je tudi $\mathbb{E}^B(|X|) < \infty$ in velja $\mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}(X \mid B)$.

Dokaz: „standardna mašinerija"; Naredimo le 1. korak.

$X = \mathbb{1}_A$: $\quad \mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}^B(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}^B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A\cap B})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Nadaljevanje: domača vaja. $\blacksquare$

Definicija: Naj bo X $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva slučajna spremenljivka z $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Za σ-algebro $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ definirajmo $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ kot $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo slučajno spremenljivko Z z lastnostjo, da za vsak dogodek $B \in \mathcal{H}$ velja: $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$. Slučajni spremenljivki Z pravimo pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X glede na $\mathcal{H}$.

Opazka 3.16: Pogojna pričakovana vrednost Z je le skoraj natančno določena: če sta Z_1 in Z_2 pogojni pričakovani vrednosti slučajne spremenljivke X glede na $\mathcal{H}$, velja $\mathbb{P}(Z_1 = Z_2) = 1$: postavimo $B_1 := Z_1 > Z_2$, $B_2 = Z_2 > Z_1$ (DV).

$\rightsquigarrow Z = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ je v resnici ekvivalenčni razred, gre za zlorabo notacije

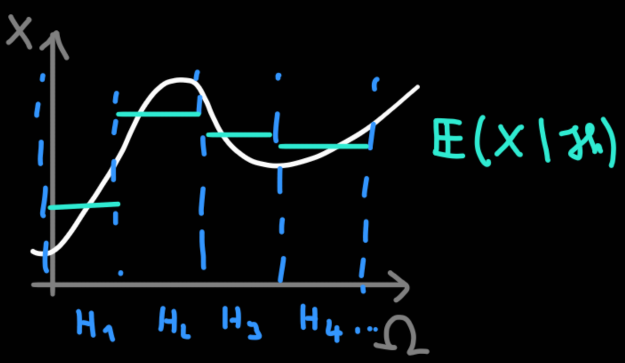
Opazka 3.17: Če je X že $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = X$.

Trditev 3.18: Če je $\mathcal{H}$ σ-algebra, generirana z števno particijo $(H_k)_{k\in K}$ prostora Ω, tj. družina vseh možnih unij množic H_k, in Z slučajna spremenljivka, velja:

(1) Z je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva $\Leftrightarrow$ Z je na vsakem dogodku H_k konstantna

(2) $Z = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \Leftrightarrow Z$ je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ merljiva in na vsakem dogodku H_k s $\mathbb{P}(H_k) > 0$ enaka $\mathbb{E}(X \mid H_k)$.

<u>Dokaz</u>: DV.



<u>Posledica 3.19</u>: Za $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$ je $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$.

<u>Izrek 3.20</u> [različica krepke lastnosti Markova za pogojno pričakovano vrednost]: Pod pogoji izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0} / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - merljivo funkcijo $h: S^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ na dogodku $\{T<\infty\}$ velja:

$$\mathbb{E}_\pi [h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T} [h(X_0, X_1, \dots)].$$

<u>Opomba</u>: Glede na to, da so $X_T, X_{T+1}, \dots$ nedefinirane na $\{T=\infty\}$ bi morali $h(X_T, X_{T+1}, \dots)$ zamenjati s slučajno spremenljivko Y, ki se na dogodku $\{T<\infty\}$ ujema s $h(X_T, X_{T+1}, \dots)$.

<u>Opomba</u>: Pri $\mathbb{E}_{X_T} [h(X_0, X_1, \dots)]$ gre za dve ločeni manifestaciji slučajnega procesa $X_0, X_1, \dots$

$$\omega \longmapsto \mathbb{E}_{X_{T(\omega)}(\omega)} [h(X_0, X_1, \dots)]$$

$$= \int h(X_0(\omega'), X_1(\omega'), \dots) \, d\mathbb{P}_{X_{T(\omega)}(\omega)}(\omega')$$

Nauk: imamo dve omegi.

Podoben primer od prej: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$$F_X(X) \neq \mathbb{P}(X \leq X) = 1$$

$$\omega \mapsto F_X(X(\omega)) = \mathbb{P}(\{\omega' \mid X(\omega') \leq X(\omega)\})$$

<u>Nauk</u>: pri zlorabi notacije moramo biti previdni

<u>Dokaz izreka 3.20</u>: Spomnimo se izreka 3.10':

$$\mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mid B] = \mathbb{E}_\rho[h(X_0, X_1, \dots)].$$

$B \in \mathcal{F}_T$, $B \subseteq \{T < \infty\}$

$$\| $$

$$\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\underbrace{h(X_T, X_{T+1}, \dots)}_{\text{strogo gledano: } Y \text{ od prej}} \mathbb{1}_B]$$

Za poljubno omejeno slučajno spremenljivko W velja:

$$\mathbb{E}_\rho(W) \overset{3.9}{=} \sum_{x \in S} \rho(x) \mathbb{E}_x(W) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}_\pi^B(X_T = x) \mathbb{E}_x(W)$$

$$= \mathbb{E}_\pi^B[\mathbb{E}_{X_T}(W)]$$

$$\overset{3.15}{=} \frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}(W) \cdot \mathbb{1}_B]$$

Sledi, da za poljuben $B \in \mathcal{F}_T$ s $\mathbb{P}_\pi(B) > 0$ velja:

$$\cancel{\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)}} \mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mathbb{1}_B] = \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)}} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)] \mathbb{1}_B]$$

▨

3.3 Dosegljivost stanj

Popravek terminologije:

<u>Definicija</u>: Čas ~~zadetja~~ vstopa v množico A:

$$T_A := \min\{n = 0, 1, 2, \dots \mid X_n \in A\}$$

Čas zadetja množice A: $T_A^{(1)} := \min\{n = 1, 2, 3, \dots \mid X_n \in A\}$.

<u>Opazka 3.21</u>: Tudi $T_A^{(1)}$ je čas ustavljanja:

$\{T_A^{(1)} = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$.

<u>Opazka 3.22</u>: Če je $x \notin A$, je $\mathbb{P}_x(T_A^{(1)} = T_A) = 1$.

<u>Definicija</u>: $T_y := T_{\{y\}}$, $T_y^{(1)} := T_{\{y\}}^{(1)}$

Definicija: Verjetnost dosega stanja y iz stanja x je:

$$\rho_{x,y} := \mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(X_1 = y \text{ ali } X_2 = y \text{ ali } \dots)$$

Stanje y je dosegljivo iz stanja x, če je $\rho_{x,y} > 0$.
Pišemo $x \longrightarrow y$. $x \to x$ ni nujno res

Opazka 3.23: Za poljubne dogodke $A_1, A_2, \dots$ velja:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}(A_n) > 0$$

Torej je $x \longrightarrow y \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$.

Trditev 3.24: Če je $x \longrightarrow y$ in $y \longrightarrow z$, je tudi $x \longrightarrow z$.

Dokaz: Obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$, in tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_y(X_n = z) > 0$. Po lastnosti Markova (izrek 3.8) pa je $\mathbb{P}_x(X_{m+n} = z \mid X_m = y) = \mathbb{P}_y(X_n = z)$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}_x(X_{m+n} = z) \geq \mathbb{P}_x(X_n = y, X_{m+n} = z) = \mathbb{P}_x(X_m = y)\,\mathbb{P}_y(X_n = z) > 0. \ \blacksquare$$

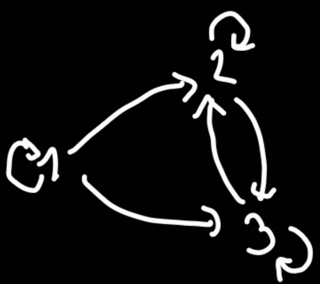
Opomba: $P^m = [\mathbb{P}_x(X_m = y)]_{x,y}$ $P^{m+n} = P^m \cdot P^n$

Sledi: $\mathbb{P}_x(X_{m+n} = z) = \sum_y \mathbb{P}_x(X_m = y)\,\mathbb{P}_y(X_n = z)$

Definicija: Stanje x je minljivo (angl. transient), če je $\rho_{x,x} < 1$, in povrnljivo (angl. recurrent), če je $\rho_{x,x} = 1$.

Primer:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ & 3/4 & 1/4 \\ & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



Stanje 1 je minljivo, saj je $\rho_{1,1} = 1/2$.
Stanji 2 in 3 sta povrnljivi:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{2,2} &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\rho_{3,2} \\ \rho_{3,2} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\rho_{3,2} \quad \Rightarrow \rho_{3,2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho_{2,2} = 1$$

Podobno za $\rho_{3,3}$.

Lema 3.25: Naj bo $x \longrightarrow y$, tj. $\rho(x,y) > 0$. Če je $\rho_{y,x} < 1$, je stanje x minljivo.

Dokaz: BŠS $x \neq y$. $\exists m \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$ in $\forall n < m.\ \mathbb{P}_x(X_n = y) = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x(X_n = x, X_m = y) = \mathbb{P}_x(X_n = x) \cdot \mathbb{P}_x(X_m = y \mid X_n = x)$$
$$= \mathbb{P}_x(X_n = x)\, \underbrace{\mathbb{P}_x(X_{m-n} = y)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow$ Za vsak $n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ je torej $\mathbb{P}_x(X_n = x, X_m = y) = 0$.

3. november 2025

↑ to bi šlo, vendar bomo naredili drugače (dokaz kasneje) (trditev 3.29)

Trditev 3.26: Neenakost $P_x(X_n = y) > 0$ velja natanko tedaj, ko obstaja taka veriga stanj $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$. Torej je $x \longrightarrow z$ natanko tedaj, kadar obstaja takšen n in takšni $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz: $\mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum\limits_{z_1, \dots, z_{n-1} \in S} p_{z_0 z_1} p_{z_1 z_2} \cdots p_{z_{n-1} z_n}$, kjer je $z_0 = x$ in $z_n = y$.

Vsota na desni je večja od 0 natanko tedaj, ko obstajajo taki $z_1, \dots, z_{n-1}$ da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, \dots, n$.

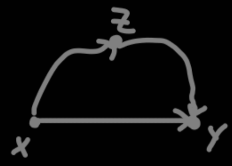
Drugi del sledi iz opazke 3.23:

$$x \to y \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ P_x(X_n = y) > 0$$

$\Updownarrow$ def

$P_x(\exists n \in \mathbb{N}.\ X_n = y) > 0$ $\blacksquare$

Trditev 3.27: $\rho_{x,y} = p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\rho_{z,y}$.



Dokaz: $\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x\left(\{X_1=y\}\cup\{X_2=y\}\cup\cdots\right)$

$$= \mathbb{P}_x\left(X_1=y\right) + \sum_{z;\, z\neq y} \mathbb{P}_x\left(\{X_1=z\}\cap\left(\{X_2=y\}\cup\{X_3=y\}\cup\cdots\right)\right)$$

$$= \mathbb{P}_x\left(X_1=y\right) + \sum_{\substack{z;\, z\neq y \\ \mathbb{P}_x(X_1=z)>0}} \mathbb{P}(X_1=z)\,\mathbb{P}_x\left(\{X_2=y\}\cup\{X_3=y\}\cup\cdots \mid X_1=z\right)$$

$$= p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\,\mathbb{P}_z\left(\{X_1=y\}\cup\{X_2=y\}\cup\cdots\right)$$

↑ lastnost Markova

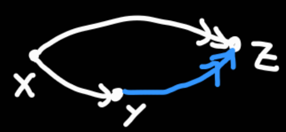
$$= p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\,\rho_{z,y}$$ ∎

Definicija: Stanje y je skoraj gotovo dosegljivo iz x, če je $\rho_{x,y}=1$; pišemo $x \twoheadrightarrow y$.

↑ ni standardna oznaka

Stanje x je torej povrnljivo $\Leftrightarrow$ $x \twoheadrightarrow x$.

Trditev 3.28: Če je $x \twoheadrightarrow z$, $y\neq z$ in $p_{x,y}>0$, je tudi $y \twoheadrightarrow z$.



Dokaz: Po trditvi 3.27 je

$$\rho_{x,z} = p_{x,z} + \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}\rho_{w,z}.$$

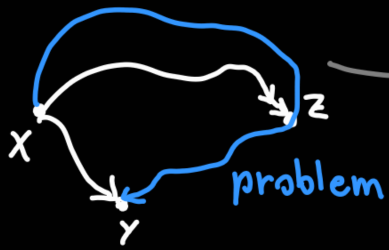
$$1 = p_{x,z} + \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{1-\rho_{x,z}} = \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}\left(1-\rho_{w,z}\right)$$

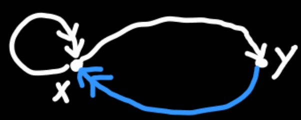
Torej za vse $w\neq z$ velja $p_{x,w}(1-\rho_{w,z})=0$.

Ker je $p_{x,y}>0$ in $y\neq z$, mora biti $1-\rho_{w,z}=0$, t.j. $\rho_{y,z}=1$. ∎

~~Trditev 3.29:~~ $x \twoheadrightarrow z,\ x \longrightarrow y,\ y \neq z \not\Rightarrow y \twoheadrightarrow z$



Trditev 3.29: Če je x povrnljivo in $x \longrightarrow y$, je $y \twoheadrightarrow x$.



__Dokaz:__ Po trditvi 3.26 obstaja taka veriga stanj $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1} z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Privzamemo lahko, da so $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ vsi različni od x. Iz prejšnje trditve z indukcijo dobimo, da je $z_k \twoheadrightarrow x$ za vse $k = 0, 1, \dots, n$. ▨

$$\left(z_k \twoheadrightarrow x,\ z_k \longrightarrow z_{k+1},\ z_{k+1} \neq x \Rightarrow z_{k+1} \twoheadrightarrow x\right)$$

Velja: Trditev 3.29 $\Longleftrightarrow$ Lema 3.25, torej smo dokazali lemo 3.25.

__Definicija:__ Za $k = 1, 2, \dots$ rekurzivno definiramo čas k-tega obiska množice $A \subseteq S$ s predpisom:

$$T_A^{(k+1)} := \begin{cases} \min\{n = T_A^{(k)}+1, T_A^{(k)}+2, \dots \mid X_n \in A\}; & T_A^{(k)} < \infty \\ \infty & ; T_A^{(k)} = \infty \end{cases},$$

kjer je $T_A^{(1)}$ že definiran. Število obiskov množice A je:

$$\begin{aligned} N(A) &:= |\{n = 1, 2, 3, \dots \mid X_n \in A\}| \\ &= \max\{k = 1, 2, \dots; T_A^{(k)} < \infty\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_A^{(k)} < \infty) \end{aligned}$$

Če je $N(A) = \infty$, dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < \infty$, če je $N(A) < \infty$, pa dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < T_A^{(N(A))} < \infty = T_A^{(N(A)+1)} = \dots$.

Označimo $T_y^{(k)} := T_{\{y\}}^{(k)}$ in $N(y) := N(\{y\})$.

Opazka 3.30: $\{T_A^{(k)} < \infty\} = \{N(A) \geq k\}$

Spomnimo se: $\mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty) = \rho_{x,y}$

$$\mathbb{P}_x(T_y^{(k+1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty, T_y^{(k+1)} < \infty)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty)}_{\text{če je to } > 0} \cdot \mathbb{P}_x^{T_y^{(1)} < \infty}(T_y^{(k+1)} < \infty)$$

$$= \rho_{x,y} \cdot \mathbb{P}_x^{T_y^{(1)} < \infty}\left(\begin{array}{l} \exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za} \\ \text{katere je } X_{T_y^{(1)}+n} = y \end{array}\right)$$

krepka lastnost Markova, $X_{T_y^{(1)}} = y$

$$= \rho_{x,y} \mathbb{P}_y \left(\begin{array}{l} \exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n \text{ za} \\ \text{katere je } X_n = y \end{array}\right)$$

$$= \rho_{x,y} \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty)$$

Med drugim je $\mathbb{P}_y(T^{(k+1)} < \infty) = \rho_{y,y} \mathbb{P}_y(T^{(k)} < \infty)$, torej z indukcijo dobimo: $\mathbb{P}_x(T_y^{(k+1)} < \infty) = \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^k$.

Dokazali smo:

Trditev 3.31: $\mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) = \mathbb{P}_x(N(y) \geq k) = \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^{k-1}$ (za $k = 1, 2, \dots$).

Opazka 3.32 [razločitev]: Velja $\mathbb{P}_x(N(y) = 0) = 1 - \rho_{x,y}$ in nadalje:

* Če je stanje y minljivo ali $\rho_{x,y} = 0$, je:

$$\mathbb{P}_x(N(y) = k) = \mathbb{P}_x(N(y) \geq k) - \mathbb{P}_x(N(y) \geq k+1)$$

$$= \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^{k-1}(1 - \rho_{y,y}); \quad k = 1, 2, \dots$$

(ob dogovoru $0^0 := 1$)

Velja $\mathbb{P}_x(N(y) = \infty) = 0$

$x \longrightarrow y$

* Če je stanje y povrnljivo in $\rho_{x,y} > 0$, pa je $\mathbb{P}_x(N(y) = k) = 0$ za $k = 1, 2, 3, \dots$; in $\mathbb{P}(N(y) = \infty) = \rho_{x,y}$.

<u>Ponovimo</u>:

Za slučajno spremenljivko N z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ velja:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}(N > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(N \geq k).$$

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k)$$

Opazka 3.33: $\mathbb{E}_\pi[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_n \in A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(T_A^{(k)} < \infty)$

Opazka 3.34:

$$\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{xy}} & ; \ y \text{ minljivo} \\ 0 & ; \ \rho_{x,y} = 0 \\ \infty & ; \ y \text{ povrnljivo in } \rho_{x,y} > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) = \rho_{xy}\rho_{x,y}^{k-1}$

(geo. vrsta)

Torej je bodisi $\mathbb{E}_x[N(y)] < \infty$ bodisi $\mathbb{P}_x(N(y) = \infty) > 0$.

Opazka 3.35: * Če je stanje x minljivo, je:

$$\mathbb{P}_x(N(x) = k) = \rho_{x,x}^k (1 - \rho_{x,x}); \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad 0^0 = 1$$

$$\mathbb{P}_x(N(x) = \infty) = 0$$

premaknjena geometrijska porazdelitev

Torej je $N(x) + 1 \sim \mathrm{Geom}(\rho_{x,x})$ in $\mathbb{E}_x[N(x)] = \frac{\rho_{x,x}}{1-\rho_{x,x}}$.

* Če je stanje x povrnljivo, pa je: $\mathbb{P}_x(N(x) = \infty) = 1$.

10\. in 17. november 2025

<u>Definicija</u>: Stanji sta povezani, če velja $x = y$ ali:

$$x \to y \quad \text{in} \quad y \longrightarrow x.$$

Pišemo: $x \longleftrightarrow y$

Opazka 3.36: To je ekvivalenčna relacija.

Definicija: Ekvivalenčnim razredom, ki jih porodi relacija povezanosti, pravimo **nerazcepne množice**.

Definicija: Markovska veriga je **nerazcepna**, če je celotna množica stanj nerazcepna.

Opazka 3.37: Za nerazcepni množici A in B so naslednje trditve ekvivalentne:

- $\exists x \in A.\ \exists y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\exists x \in A.\ \forall y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\forall x \in A.\ \forall y \in B.\ x \longrightarrow y$

Če te trditve veljajo, pišemo $A \longrightarrow B$.

Opazka 3.38: Ta relacija je tranzitivna.

Trditev 3.39: Če je stanje x povrnljivo in $x \longrightarrow y$, potem je $x \twoheadrightarrow y$, $y \twoheadrightarrow x$, y pa je prav tako povrnljivo.

Dokaz: Izjava $y \twoheadrightarrow x$ sledi iz trditve 3.29.
Dovolj je dokazati, da je stanje y povrnljivo. Uporabili bomo opazki 3.33 in 3.34:

$$\mathbb{E}_\pi[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_n \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(T_a^{(n)} < \infty$$

in

$$\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}} & ; \quad y \text{ minljivo} \\ 0 & ; \quad \rho_{x,y} = 0 \\ \infty & ; \quad y \text{ povrnljivo in } \rho_{x,y} > 0 \end{cases}$$

Dovolj je torej dokazati, da je $\mathbb{E}_x[N(y)] = \infty$, saj iz tega sledi povrnljivost y. Vemo

$$\mathbb{E}_x[N(x)] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) = \infty$$

Ker je $x \to y$, po opazki 3.23 obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_x(X_k = y) > 0$. Ta dva podatka nam data

$$\begin{aligned}
\infty &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) \cdot \underline{\mathbb{P}_x(X_k = y)} \\
&\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) \cdot \mathbb{P}_x(X_{m+k} = y \mid X_m = x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x, X_{m+k} = y) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{m+k} = y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{E}_x[N(y)]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y$ je povrnljivo ▨

Posledica 3.40: V vsaki nerazcepni množici so bodisi vsa stanja minljiva, bodisi vsa stanja povrnljiva.

Definicija: Množica $A \subseteq S$ je *zaprta* (tudi *absorbirajoča*, *terminalna*), če za poljubna $x \in A$ in $y \notin A$ velja $\rho_{x,y} = 0$.

Opazka 3.41: Če je A zaprta, $x \in A$ in $y \notin A$, ne more biti $x \to y$. Torej za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathbb{P}_x(X_n = y) = 0$, kar pomeni $\mathbb{P}_x(X_n \in A) = 1$. Nadalje je $\mathbb{P}_x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \in A\}\right) = 1$.

Torej lahko markovsko verigo zožimo na A.

Definicija: Za nerazcepni množici definiramo relacijo $A \leq B$, če je bodisi $A = B$ bodisi $A \to B$.

Opazka 3.42: Tako definirana relacija predstavlja delno urejenost, nerazcepna množica pa je zaprta $\Leftrightarrow$ predstavlja maksimalni element.

Opazka 3.43: Če je nerazcepnih množic končno mnogo, je vsaj ena izmed njih zaprta.

Trditev 3.44: Nerazcepne množice, ki niso zaprte, imajo minljiva stanja.

Dokaz: Naj bo A nerazcepna množica, ki ni zaprta. Tedaj obstajata takšna $x \in A$ in $y \notin A$, da je $x \longrightarrow y$. Potem pa ne more biti $y \rightarrow x$, zato je po lemi 3.25 stanje x minljivo. Po posledici 3.40 sledi, da so vsa stanja minljiva. ▨

Primer: Asimetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}$:

$$p_{k,k+1} = \theta \quad \text{in} \quad p_{k,k-1} = 1-\theta,$$

kjer je $\theta \in (0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Izkaže se (vaje), da so vsa stanja minljiva, čeprav je celotna markovska veriga nerazcepna.

Trditev 3.45: V Markovski verigi s končno mnogo stanji je vsaj eno od njih povrnljivo.

Dokaz: Naj bo $x \in S$ in $n \in \mathbb{N}$. Velja $\sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(X_n = y) = 1$. Torej

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}}_{\text{končno}} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}}_{\text{končno}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

Sledi: za neka $x, y \in S$ mora biti $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \infty$, kar pa je ravno: $\mathbb{E}_x[N(y)] = \infty$.

$\Rightarrow$ Po opazki 3.34 mora biti stanje y povrnljivo.

Posledica 3.46: Končna nerazcepna množica je zaprta natanko tedaj, ko so njena stanja povrnljiva.

3.4. Konstrukcija invariantnih mer

Inducirane mere: $\mu_n = \mu P^n$ oziroma $\mu_n(y) = \sum_{x \in S} \mu(x) \cdot \mathbb{P}_x(X_n = y)$.

Definicija: Mera μ^* na $(S, 2^S)$ je invariantna za markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$; $x, y \in S$, če je:

$$\mu^*(y) = \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \quad \text{za vse } y \in S.$$

Stacionarna ali invariantna porazdelitev je invariantna verjetnostna mera.

Definicija: Za markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in izbrano stanje $x \in S$ definiramo mero μ^*_x po predpisu:

$$\mu^*_x(y) := \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n = y)}_{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(X_n = y,\, n \leq T_x^{(1)})}\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y,\ T_x^{(1)} \geq n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = y)$$

Opazka 3.47: Velja $\mu^*_x(x) = \rho_{x,x} \cdot 1 + (1 - \rho_{x,x}) \cdot 0 = \rho_{x,x}$

$$\hookrightarrow \Big(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(\dots)\Big)(\omega) = \begin{cases} 1; & \text{vrnemo se v } x \\ 0; & \text{ne vrnemo se v } x \end{cases}$$

Trditev 3.48 [Ciklični trik]: Če je stanje x povrnljivo, velja tudi:

$$\mu_x^*(y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbb{1}(X_n=y)\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n=y,\ T_x^{(1)} > n).$$

<u>Dokaz</u>: Pri računanju $\mu_x^*(y)$ opazujemo dogodke oblike

$$\underbrace{x\ \overbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}^{\text{to upoštevamo v definiciji } \mu_x^*}}_{\text{to upoštevamo pri trditvi}}\ x$$

Oglejmo si dogodka $\{X_0=y\}$ in $\{T_x^{(1)}<\infty,\ X_{T_x^{(1)}}=y\}$. Za $y\neq x$ sta ta dogodka nemogoča, za $y=x$ pa skoraj gotova. $\blacksquare$

<u>Izrek 3.49</u>: Če je stanje x povrnljivo, je mera μ_x^* invariantna.

<u>Dokaz</u>: Računamo:

$$\sum_{y\in S}\mu_x^*(y)\,p_{y,z} \overset{\text{ciklični trik}}{=} \sum_{y\in S}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ T_x^{(1)}>n)\cdot p_{y,z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ \underbrace{T_x^{(1)}>n}_{\in\mathcal{F}_n})\,p_{y,z} \qquad (*)$$

Če je $\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n)>0$, je po lastnosti Markova:

$$\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y, T_x^{(1)}>n)\,p_{y,z} = \sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y, T_x^{(1)}>n)\cdot\mathbb{P}_x(X_{n+1}=z \mid X_n=y, T_x^{(1)}>n)$$

$$= \sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y, T_x^{(1)}>n,\ X_{n+1}=z)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n,\ X_{n+1}=z)$$

Ta enakost velja tudi, če je $\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n)=0$ (obe strani sta 0).
Vstavimo v $(*)$:

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n+1,\ X_{n+1}=z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n,\ X_n=z) = \mu_x^*(z). \qquad \blacksquare$$

Iz tega izreka (3.49) in trditve 3.45 pa sledi izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev.

Opomba: Utemeljiti obstoja levega lastnega vektorja za $\lambda = 1$ ni bil problem. Problem je pokazati nenegativnost njegovih komponent.

Opazka 3.50: Če je μ^* invariantna mera, velja:

- $\mu^*(x) = \infty$, $p_{x,y} > 0 \Rightarrow \mu^*(y) = \infty$
- $\mu^*(x) = 0$, $p_{x,y} > 0 \Rightarrow \mu^*(y) = 0$
- Če je A nerazcepna množica, velja ena od naslednjih možnosti:
  - $\forall x \in A.\ \mu^*(x) = 0$
  - $\forall x \in A.\ \mu^*(x) = \infty$
  - $\forall x \in A.\ \mu^*(x) \in (0, \infty)$

Posledica 3.51: Naj bo x povrnljivo in μ_x^* pripadajoča invariantna mera. Če je $x \longleftrightarrow y$, je $0 < \mu_x^*(y) < \infty$, sicer pa je $\mu_x^*(y) = 0$.

Opomba: Če je x ni povrnljivo stanje, konstrukcija še deluje, ampak ne dobimo invariantne mere.

Dokaz: Če je $x \longleftrightarrow y$, rezultat sledi iz opazke 3.50. Če ni $x \longleftrightarrow y$, po trditvi 3.29 ne more biti $x \longrightarrow y$, saj je x povrnljivo. Potem sledi $\mu_x^*(y) = 0$. ▨

Dokaz izreka 3.6: Po trditvi 3.45 je vsaj eno stanje povrnljivo, naj bo to x. Če je $x \longleftrightarrow y$, je $\mu_x^*(y) \in (0, \infty)$, sicer pa je $\mu_x^*(y) = 0$. Ker je S končna, mora biti $0 < \sum_{y \in S} \mu_x^*(y) < \infty$. Potem pa je:

$$\pi^*(z) := \frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{y \in S} \mu_x^*(y)}$$

iskana stacionarna porazdelitev. ▨

Opazka 3.52:
$$\sum_{y\in S}\mu_x^*(y) = \sum_{y\in S}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ T_x^{(1)}\geq n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ T^{(1)}\geq n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n)$$
$$= \mathbb{E}[T_x^{(1)}]$$

Definicija: Stanje x je pozitivno povrnljivo, če je $\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]<\infty$. Za stanje, ki je povrnljivo z $\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]=\infty$, pravimo, da je ničelno povrnljivo.

Posledica 3.53: Če je stanje x pozitivno povrnljivo, obstaja stacionarna porazdelitev π^*, za katero je
$$\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]}$$
to pa je totalna masa za μ_x^*

(iz opazke 3.47 vemo, da je $\mu_x^*(x) = \rho_{x,x}=1$.

3.5. Časovni obrat markovske verige

Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo. Kdaj lahko rečemo, da je tudi slučajni vektor $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0)$ del neke markovske verige?

Najosnovnejša markovska lastnost:
$$\mathbb{P}(X_{k+1}=x_{k+1}\mid X_0=x_0, X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k) = \mathbb{P}(X_{k+1}=x_{k+1}\mid X_k=x_k) =: p_{x_k,x_{k+1}}^{(k,k+1)}$$

Mi opazujemo le čase $k=0,1,\ldots,n$. Obrnimo čas! Računajmo:
$$\mathbb{P}(X_{k-1}\mid X_k=k,\ldots,X_n=x_n) = \frac{\mathbb{P}(X_{k-1}=x_{k-1},\ldots,X_n=x_n)}{\mathbb{P}(X_k=x_k,\ldots,X_n=x_n)}$$

$$= \frac{\pi^{(k-1)}(x_{k-1}) \cdot p^{(k-1,k)}_{x_{k-1},x_k} \cdot \cancel{p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}}} \cdots \cancel{p^{(n-1,n)}_{x_{n-1},x_n}}}{\pi^{(k)}(x_k)\, \cancel{p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}}} \cdots \cancel{p^{(n-1,n)}_{x_{n-1},x_n}}}$$

vpeljemo robno porazdelitev $\pi^{(k)}(x) := \mathbb{P}(X_k = x)$

$$= \frac{\pi^{(k-1)}(x_{k-1})}{\pi^{(k)}(x_k)} \cdot p^{(k-1,k)}_{x_{k-1},x_k}$$

<u>Opazka 3.54</u>: Obrat časa ohranja markovsko lastnost v najosnovnejšem smislu: če jo ima zaporedje $X_0, \dots, X_n$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) = p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}} \;; \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

jo ima tudi zaporedje $X_n, X_{n-1}, \dots, X_n$:

$$\mathbb{P}(X_{k-1} = x_{k-1} \mid X_k = x_k, \dots, X_n = x_n) = p^{(k,k-1)}_{x_k,x_{k-1}},$$

kjer je

$$p^{(k,k-1)}_{y,x} := \frac{\pi^{(k-1)}(x)}{\pi^{(k)}(y)}\, p^{(k-1,k)}_{x,y} \;; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

<u>Definicija</u>: Markovski verigi z invariantno mero μ^*, za katero je $0 < \mu^*(x) < \infty$ (tj. μ^* je po točkah končna in nikjer ničelna), definiramo prehodne verjetnosti za obrnjen tok časa:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)}\, p_{x,y}$$

(pomisli na $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(B \mid A)$)

<u>Opazka 3.55</u>: To so res prehodne verjetnosti:

$$\sum_{x \in S} \hat{p}_{y,x} = \frac{1}{\mu^*(y)} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{xy} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\mu^*(y)} \cdot \mu^*(y) = 1.$$

μ^* invariantna

<u>Opazka 3.56</u>: Če je nikjer ničelna in po točkah končna mera μ^* invariantna za markovsko verigo z določenimi prehodnimi verjetnostmi, je invariantna tudi za markovsko verigo s pripadajočimi časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi:

$$\sum_{y\in S} \mu^*(y)\,\hat{p}_{y,s} = \sum_{y\in S} \cancel{\mu^*(y)} \frac{\mu^*(x)}{\cancel{\mu^*(y)}} p_{x,y} = \mu^*(x)$$

↳ μ^* invariantna

Opazka 3.57: Časovni obrat prehodnih verjetnosti je sam sebi inverzen:

$$\hat{\hat{p}}_{xy} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)}\,\hat{p}_{y,x} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} \cdot \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)}\, p_{x,y} = p_{x,y}.$$

Opazka 3.58: Če je $X_0, X_1, \dots$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ ter nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo π^*, $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots$ pa markovska veriga s časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi $\hat{p}_{y,x}$ pri verjetnostnih merah $\mathbb{P}_{\pi^*}$ in $\hat{\mathbb{P}}_{\pi^*}$, velja:

enako porazdeljena

$$(\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n) \overset{d}{=} (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

Definicija: Slučajni proces $X_0, X_1, \dots$ je **časovno obrnljiv** (angleško reversible), če za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja:

$$(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Opazka 3.59: Časovno obrnljiv proces je nujno stacionaren. Zgornji pogoj nam namreč da: $\forall n\in\mathbb{N}.\ X_0 \overset{d}{=} X_n$.

Opazka 3.60: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi p_{xy} in nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo π^* je pri $\mathbb{P}_{\pi^*}$ časovno obrnljiva natanko tedaj, ko za poljubna $x,y\in S$ velja:

$$\pi^*(x)\,p_{x,y} = \pi^*(y)\,p_{y,x}. \quad \left(\text{izhaja iz } p_{y,x} = \frac{\pi^*(x)}{\pi^*(y)} p_{x,y}\right)$$

Intuicija s prekladanjem peska: Med vsakima stanjema x,y velja: Kolikor peska gre iz x v y, gre tudi v drugo smer.
↳ To pojasni ima pojma iz naslednje definicije.

Definicija: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in mera μ na S sta v točni izravnavi (angleško: detailed balance), če za poljubna $x,y \in S$ velja $\mu(x)p_{x,y} = \mu(y)p_{y,x}$.

Opazka 3.61: Vsaka mera, ki je z dano markovsko verigo v točni izravnavi, je zanjo tudi invariantna:

$$\sum_{x\in S}\mu(x)p_{x,y} = \sum_{x\in S}\mu(y)p_{y,x} = \mu(y).$$

Primer: Vreme (isto kot do zdaj):

$$P = \begin{bmatrix} 7/10 & 2/10 & 1/10 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 2/10 & 3/10 & 5/10 \end{bmatrix}$$

Vemo že: $\pi^* = \begin{bmatrix} 2/5 & 13/35 & 8/35 \end{bmatrix}$ je edina stacionarna porazdelitev. Preverimo, ali je v točki izravnavi:

$$\pi^*(1)\cdot p_{1,2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{10} = \frac{2}{25}$$
$$\pi^*(2)\cdot p_{2,1} = \frac{13}{35}\cdot\frac{2}{10} = \frac{13}{175}$$

Ta markovska veriga ni v točni izravnavi s svojo edino stacionarno porazdelitvijo, zato tudi ni v točni izravnavi z nobeno netrivialno mero. ▨

Primer: Slučajni sprehod po $\mathbb{Z}$: $S=\mathbb{Z}$, $p_{k,k+1}=\theta$, $p_{k,k-1}=1-\theta$. Potem je μ^* v točni izravnavi $\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{Z}.\ \mu^*(k)\cdot\theta = \mu^*(k+1)\cdot(1-\theta)$ oziroma $\mu^*(k+1) = \frac{\theta}{1-\theta}\mu^*(k)$. Torej je: $\mu^*(k) = C\cdot\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$; $C\in[0,\infty]$.

To lahko omejimo tudi na končno množico $S_b = \{0,1,\dots,b\}$:

$$\left.\begin{aligned} &p_{k,k+1} = \theta \quad \text{za } k=0,1,\dots,b-1 \\ &p_{k,k-1} = 1-\theta \quad \text{za } k=1,\dots,b \\ &p_{0,0} = 1-\theta,\quad p_{b,b}=\theta \end{aligned}\right\}$$

kockarjev bankrot, kjer se igra ne konča v robnih stanjih

Mere μ^*, definirane kot zgoraj so še vedno v točni izravnavi.
Porazdelitev v točni izravnavi:

$$\pi^*(k) := \begin{cases} \Theta^k (1-\Theta)^{n-k} \cdot \dfrac{1-2\Theta}{(1-\Theta)^{b+1} - \Theta^{b+1}} & ; \Theta \neq 1/2 \\ \dfrac{1}{b+1} & ; \Theta = 1/2 \end{cases}$$

Ta slučajni proces je časovno obrnljiv, čeprav je lahko asimetričen.

Do konca razdelka naj bo $X_0, X_1, \ldots$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in invariantno mero μ^*, ki je po točkah končna in nikjer ničelna:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,y}$$

Prav tako naj bo $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots ; (\hat{\mathbb{P}}_x)_{x \in S}$ časovno obrnjena markovska veriga glede na invariantno mero μ^*.

<u>Trditev 3.62</u>: Velja

$\hat{X}_0 = y$ je že privzeto

$$\hat{\mathbb{P}}_y\left(\hat{X}_n = x, (\hat{X}_{n-1}, \ldots, \hat{X}_1) \in D\right) = \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x\left((X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D, X_n = y\right).$$

<u>Dokaz</u>: Dovolj je preveriti za enojce (S je diskretna): $D = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Velja:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}_y(X_n = x, (\hat{X}_{n-1}, \ldots, \hat{X}_1) \in D) &= \hat{\mathbb{P}}_y(X_n = x, \hat{X}_{n-1} = x_1, \ldots, \hat{X}_1 = x_{n-1}) \\
&= \hat{p}_{y,x_{n-1}} \cdot \hat{p}_{x_{n-1},x_{n-2}} \cdots \hat{p}_{x_2,x_1} \cdot \hat{p}_{x_1,x} \\
&= \frac{\cancel{\mu^*(x_{n-1})}}{\mu^*(y)} p_{x_{n-1},y} \frac{\cancel{\mu^*(x_{n-2})}}{\cancel{\mu^*(x_{n-1})}} p_{x_{n-2},x_{n-1}} \cdots \frac{\mu^*(x)}{\cancel{\mu^*(x_1)}} p_{x,x_1} \\
&= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-1},y} \\
&= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x(\underbrace{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}}_{(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D}, X_n = y)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

24. november 2025

Posledica 3.63: $x \longrightarrow y$ v $X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z\in S} \iff$ $y \longrightarrow x$ v $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$.

Dokaz: $x \longrightarrow y$ v $X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z\in S}$

$$\Updownarrow$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 .\ \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$$

$y \longrightarrow x$ v $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$.

$$\Updownarrow$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 .\ \underbrace{\hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_n = x)}_{= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x(X_n = y)} > 0$$

$\blacksquare$

Posledica 3.64: Obrat časa ohrani minljivost in povrnljivost.

Dokaz: $\underset{(\text{v } \mathbb{P}_z)_{z\in S}}{x \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow x} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x)}_{= \hat{\mathbb{P}}_x(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \dots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x)} = 1$

$\iff x \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$

$\blacksquare$

3.6. Sorazmernost invariantnih mer

Spomnimo se: $\mu^*_x(y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n = y)\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\underbrace{X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x,}_{T_x^{(1)} \geq n} X_n = y)$$

$$\mu^*_x(x) = \varrho_{x,x}$$

Lema 3.65: Če je μ^* invariantna mera nerazcepne markovske verige in $\mu^*(x) = 1$, je $\mu^*(y) \geq \mu_x(y)$ za vse $y \in S$. Če so stanja verige povrnljiva, pa velja $\mu^*(y) = \mu_x^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izrazimo $\mu_x^*(y)$ z verjetnostmi v markovski verigi $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z \in S}$, ki pripada obratu časa glede na μ^*. Ta je možen, ker po opazki 3.50 za vse $y \in S$ velja $0 < \mu^*(y) < \infty$, saj je $x \longleftrightarrow y$.

$$\mu_x^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = y)$$

$$\overset{3.62}{=} \underbrace{\frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)}}_{=1} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \ldots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x)}_{\text{paroma disjunktni dogodki}}$$

$$= \mu^*(y) \cdot \hat{\mathbb{P}}_y(T_x^{(1)} < \infty)$$

Sledi $\mu_x^*(y) \leq \mu^*(y)$. Če pa ima markovska veriga povrnljiva stanja, jih ima po posledici 3.64 tudi v obrnjenem času. Po posledici 3.63 pa je veriga tudi v obrnjenem času nerazcepna. Po trditvi 3.39 mora biti tedaj tudi $\hat{\mathbb{P}}_y(T_x^{(1)} < \infty) = 1$ in sledi $\mu_x^*(y) = \mu^*(y)$. ▨

Posledica 3.66: Invariantne mere nerazcepne markovske verige s povrnljivimi stanji so si v premem sorazmerju: brž ko sta μ^* in ν^* invariantni meri, za kateri $\exists x \in S. 0 < \mu^*(x) < \infty$ in $\exists y \in S. 0 < \mu^*(y) < \infty$ ($\Leftrightarrow \forall x \in S. 0 < \mu^*(x), \mu^*(y) < \infty$), obstaja tak c, da je $\nu^*(y) = c\mu^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izberimo $x \in S$. Za vse $y \in S$ velja

$$\frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} = \mu_x^*(y) = \frac{\nu^*(y)}{\nu^*(x)}, \qquad \nu^*(y) = \underbrace{\frac{\nu^*(x)}{\mu^*(x)}}_{=:c} \mu^*(y)$$

▨

~~Trditev 3.67: Naj bo μ^* invariantna mera markovske verige, $S' \subseteq S$ ter $\forall x \in S'. \mu^*(x) > 0$ in $\sum_{x \in S'} \mu^*(x) < \infty$. Tedaj je S' zaprta.~~

Popravek po posledici 3.70

V nadaljevanju uporabimo popravljeno verzijo.

~~Dokaz:~~ $\underline{\sum_{y \in S'} \mu^*(y)} = \cancel{\sum_{y \in S'} \sum_{x \in S'} \mu^*(x) p_{x,y}}$

$$\cancel{= \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \sum_{y \in S'} p_{x,y}}$$

$$\cancel{= \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \left(1 - \sum_{y \in S \setminus S'} p_{x,y}\right)}$$

$$\cancel{= \underline{\sum_{x \in S'} \mu^*(x)} - \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y} = 0 \Rightarrow \forall x \in S'. \forall y \in S \setminus S'. \overset{>0}{\mu^*(x)} p_{x,y} = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow \forall x \in S'. \forall y \in S \setminus S'. p_{x,y} = 0}$$

Trditev 3.68: Stanje x poljubne markovske verige je pozitivno povrnljivo natanko tedaj, ko obstaja taka invariantna porazdelitev π^*, da je $\pi^*(x) > 0$.

Dokaz: ($\Rightarrow$): Sledi že iz posledice 3.53 (spomnimo, da smo π^* skonstruirali tako, da je $\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$).

($\Leftarrow$): Uporabili bomo opazko 3.52, po kateri je

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S} \mu_x^*(y).$$

To vsoto pa bomo ocenili s pomočjo leme 3.65. Toda ta lema predpostavlja nerazcepnost. Naj bo torej S_x nerazcepna množica, ki ji pripada stanje x. Po opazki 3.50 za vsak $y \in S_x$ velja $\pi^*(y) > 0$. Po trditvi 3.67 je množica S_x zaprta, torej lahko markovsko verigo zožimo nanjo. Zožena markovska veriga je nerazcepna, $\pi_x^* := \pi^*|_{S_x}$ pa je njena invariantna mera.

Po lemi 3.65 je $\mu_x^*(y) \le \frac{\pi_x^*(y)}{\pi_x^*(x)}$ za vse $y \in S_x$. Sledi

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S_x} \mu_x^*(y) \le \frac{1}{\pi_x^*(x)} \sum_{y \in S_x} \pi_x^*(y) < \infty.$$ ∎

Izrek 3.69: V nerazcepni markovski verigi so naslednje izjave ekvivalentne:

(1) Vsaj eno stanje je pozitivno povrnljivo.

(2) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva.

(3) Obstaja stacionarna porazdelitev.

(4) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva in $\pi^*(x) := \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$ je edina stacionarna porazdelitev.

$$\begin{tikzcd} (1) \arrow[d, Rightarrow] & (2) \arrow[l, Rightarrow] \\ (3) \arrow[ur, dotted] & (4) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Dokaz: Očitno $(4) \Rightarrow (3)$ in $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.
Dokazali smo že $(1) \Rightarrow (3)$ (izrek 3.49).

$(3) \Rightarrow (2)$: Naj bo π^* stacionarna porazdelitev in $x \in S$. Velja $\sum_{y \in S} \pi^*(y) = 1$, obstaja tak $y \in S$, da je $\pi^*(y) > 0$. Potem po opazki 3.50 velja tudi $\pi^*(x) > 0$. Iz trditve 3.67 dobimo, da je x pozitivno obrnljivo.

$(2) \Rightarrow (4)$: Po posledici 3.53 za vsak $x \in S$ obstaja stacionarna porazdelitev π_x^*, za katero je $\pi_x^*(x) = 1/\mathbb{E}(T_x^{(1)})$. Po posledici 3.66 pa je stacionarna enolično določena. Za edino stacionarno π^* in vse $x \in S$ mora torej veljati

$$\pi^*(x) = \pi_x^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})}.$$ ∎

Posledica 3.70: V markovski verigi s končno množico stanj povrnljivost pomeni tudi pozitivno povrnljivost. Če je torej markovska veriga s končno množico stanj nerazcepna, so vsa njena stanja pozitivno povrnljiva.

Dokaz: Če je stanje x povrnljivo, je μ_x^* po opazki 3.47 in izreku 3.49 invariantna mera z $\mu_x^*(x)=1$. Torej je

$$\pi_x(y) := \frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{z\in S}\mu_x^*(z)}$$

stacionarna porazdelitev s $\pi^*(x)>0$. Po trditvi 3.47 je stanje x pozitivno povrnljivo. Če je veriga nerazcepna, pa iz obstoja stacionarne sledi pozitivna povrnljivost vseh stanj. ▨

1. december 2025

Popravek: (zadnjič narobe formulirano in dokazano)

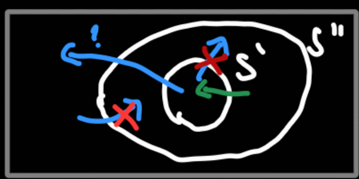
Trditev 3.67: Naj bo μ^* invariantna mera markovske verige $S'\subseteq S$ taka nerazcepna (ireducibilna) množica, da je $\mu^*(x)>0$ za vse $x\in S'$ in naj bo $\sum_{x\in S}\mu^*(x)<\infty$. Tedaj je S' zaprta.

v S' ireducibilne

Dokaz: $S'' := \{x\in X \mid \exists y\in S'.\ x\to y\}$

Dokazati moramo, da iz S' ni prehoda v $S\setminus S'$.

* Iz $S\setminus S''$ v S'' ni prehoda: če bi bilo $z\in S\setminus S''$, $x\in S''$ in $p_{x,z}>0$, bi $\exists y\in S'.\ x\to y$. Po tranzitivnosti bi bilo tedaj tudi $z\to y$, torej $z\in S''$. ⨯



* Iz S' v $S''\setminus S'$ ni prehoda: če bi imeli $y\in S'$, $x\in S''\setminus S'$ in $p_{y,x}>0$, bi po definiciji imeli tudi $x\to y$, torej $x\longleftrightarrow y$, potem pa bi moralo, ker je S' nerazcepna množica, biti tudi $x\in S'$. ⨯

* Preostane dokazati:

$$x\in S',\ y\in S\setminus S' \implies p_{x,y}=0$$

Ideja: Ker iz $S\setminus S''$ v S'' ni pretoka in ima S'' končno konstantno maso, tudi iz S'' v $S\setminus S''$ ne more biti pretoka

$$\sum_{y\in S''}\mu^*(y) \overset{\text{invariantnost}}{=} \sum_{y\in S''}\sum_{x\in S}\mu^*(x)\,p_{x,y}$$

$$\overset{\substack{\text{(iz } S\setminus S'' \text{ v } S''\\ \text{ni prehoda)}}}{=} \sum_{y\in S''}\sum_{x\in S''}\mu^*(x)\,p_{x,y}$$

$$= \sum_{x \in S''} \mu^*(x) \sum_{y \in S''} p_{x,y}$$

$$= \sum_{x \in S''} \mu^*(x) \left(1 - \sum_{y \in S \setminus S''} p_{x,y}\right)$$

$$= \sum_{x \in S''} \mu^*(x) - \sum_{x \in S''} \sum_{y \in S \setminus S''} \mu^*(x) p_{x,y}$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in S''} \sum_{y \in S \setminus S''} \mu^*(x) p_{x,y} = 0 \Rightarrow \forall x \in S''.\ \forall y \in S \setminus S''.\ \overset{>0}{\mu^*(x)}\, p_{x,y} = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in S''.\ \forall y \in S \setminus S''.\ p_{x,y} = 0$$

3.7. Zakon velikih števil

<u>Definicija</u>: Zaporedje slučajnih spremenljivk $Y_1, Y_2, \dots$ skoraj gotovo konvergira proti slučajni spremenljivki Y, če velja $\mathbb{P}(\{w \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} Y_n(w) = Y(w)\}) = 1$. Pišemo $Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} Y$. ang. a. s.

Izrek 3.71 [klasični krepki zakon velikih števil]:
Če so $Y_1, Y_2, \dots$ neodvisne in enako porazdeljene realne slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$, gre

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} \mathbb{E}(Y_1).$$

Dokaz opuščamo (elegenten dokaz z martingali).

Izrek 3.72 [krepki zakon velikih števil za markovske verige]:
Naj bo $X_0, X_1, \dots$; $(\mathbb{P}_x)_{x \in S}$ nerazcepna markovska veriga s stacionarno porazdelitvijo π^* ($\Leftrightarrow$ njena stanja so pozitivno povrnljiva). Vzemimo funkcijo $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$, za katero je $\sum_{x \in S} |h(x)| \pi^*(x) < \infty$. Tedaj za poljubno verjetnostno mero π na S pri meri $\mathbb{P}_\pi$ velja:

$$\frac{h(X_0) + \dots + h(X_{n-1})}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} \sum_{x \in S} h(x) \pi^*(x). \quad = \pi^* h$$

π^*: —
h: |

Opazka 3.73: Velja $\sum_{x\in S} h(x)\pi^* = \mathbb{E}[h(Y)]$, kjer je $Y \sim \pi^*$.

Opazka 3.74: Če je π^* verjetnostna mera na S in $X_0, X_1, \dots$; $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{xy} = \pi^*(y)$, so $X_0, X_1, X_2, \dots$ pri vseh merah $\mathbb{P}_x$ (in tudi pri vseh merah $\mathbb{P}_\pi$, kjer je $\mathbb{P}_\pi$ še ena verjetnostna mera na S) neodvisne slučajne spremenljivke, vse slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots$ pa imajo porazdelitev π^*, ki je stacionarna porazdelitev te verige. Brž ko je $\pi^*(x) > 0$ za vse $x \in S$, je veriga nerazcepna. Naj bo $h: S \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\sum_{x\in S} |h(x)|\pi^*(x) < \infty$.

*Izrek 3.71: Pri verjetnostni meri $\mathbb{P}_{\pi^*}$ gre

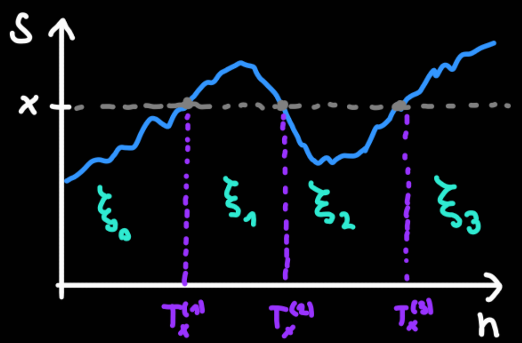
$$\frac{h(X_0) + h(X_1) + \cdots + h(X_{n-1})}{n} \longrightarrow \pi h;$$

to v resnici velja tudi pri vseh $\mathbb{P}_\pi$.

*Izrek 3.72: Brž, ko je $\pi^*(x) > 0$ za vse x, potem pri poljubni $\mathbb{P}_\pi$ velja

$$\frac{h(X_0) + h(X_1) + \cdots + h(X_{n-1})}{n} \longrightarrow \pi h.$$

Proti dokazu izreka 3.72:



Izberemo $x \in S$.

ξ_i ... ekskurzije

$L_0 = T_x^{(1)}$

$k = 1, 2, \dots$

$L_k = T_x^{(k+1)} - T_x^{(k)}$ ... dolžina k-te ekskurzije

$\xi_0 := (L_0; X_0, X_1, \dots, X_{T_x^{(1)}-1})$

$\xi_k := (L_k; X_{T_x^{(k)}}, X_{T_x^{(k)}+1}, \dots, X_{T_x^{(k+1)}-1})$; $k = 1, 2, \dots$

Trditev 3.75: Pri poljubni verjetnostni meri $\mathbb{P}_\pi$ so ekskurzije $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ neodvisne, $\xi_1, \xi_2, \dots$ pa imajo enako porazdelitev kot ξ_0 pri verjetnostni meri $\mathbb{P}_x$.

Dokaz: Dovolj bo dokazati, da se pogojna porazdelitev ekskurzije ξ_k glede na $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ pri $\mathbb{P}_\pi$ ujema s porazdelitvijo ekskurzije ξ_0 pri $\mathbb{P}_x$. To sledi iz krepke lastnosti Markova (DV). $\blacksquare$

Naj bo $h = \mathbb{1}_{\{x\}}$: $\pi^* h = \pi^*(x)$.

$$h(X_0) + h(X_1) + \dots + h(X_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_i = x)$$

$=$ število obiskov stanja x v korakih $0, 1, \dots, n-1$

$=: V(n)$

Trditev 3.76: $\dfrac{V(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \pi^*(x)$.

Dokaz: Spomnimo se, da je stanje x pozitivno povrnljivo.
Za $k = 1, 2, 3, \dots$ je torej $\mathbb{E}_\pi(L_k) = \mathbb{E}_x(L_0) = \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) < \infty$.
Po klasičnem krepkem zakonu velikih števil je torej:

$$\frac{L_1 + L_2 + \dots + L_m}{m} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{1}{\pi^*(x)}.$$

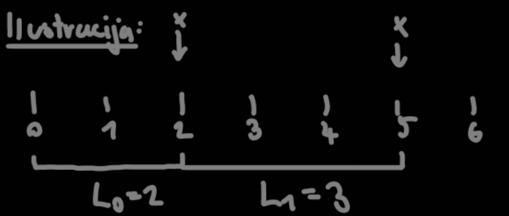
Ker je število obiskov stanja x skoraj gotovo neskončno, gre tudi $V(n) \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \infty$.

$$A_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=1}^{V(n)} L_k ; & V(n) > 0 \\ 1 ; & V(n) = 0 \end{cases} \qquad \tilde{A}_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=0}^{V(n)-1} L_k ; & V(n) > 0 \\ 1 ; & V(n) = 0 \end{cases}$$

Velja $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \frac{1}{\pi^*(x)}$, $\quad \tilde{A}_n = A_n + \underbrace{\frac{L_{V(n)} - L_0}{V(n)}}_{\to 0} \Rightarrow \tilde{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \frac{1}{\pi^*(x)}$

Velja $\underbrace{\sum_{k=0}^{V(n)-1} L_k}_{V(n)\cdot \tilde{A}_n} \le n \le \underbrace{\sum_{k=0}^{V(n)} L_k}_{L_0 + V(n)\cdot A_n}$.

Ilustracija:



$n=5$: $V(n) = 1$
$L_0 = 2 \le 5 \le 2+3 = L_0 + L_1$
$n=6$: $V(n) = 2$
$2+3 \le 5 \le 2+3+L_2$

$$\Rightarrow \quad \pi^*(x) \xleftarrow[n\to\infty]{s.g.} \frac{V(n)}{L_0 + V(n) A_n} \le \frac{V(n)}{n} \le \frac{1}{\tilde{A}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} \pi^*(x) \qquad \blacksquare$$

Dokaz izreka 3.72: $C_0 := \sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} h(X_n)$, $C_k := \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} h(X_n)$ cena ekskurzije

Velja
$$C_k = \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{1}(X_n = y) = \sum_{y \in S} h(y) \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \mathbb{1}(X_n = y)$$

$$\mathbb{E}(C_k) = \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{E}\left[\sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \mathbb{1}(X_n = y)\right]$$

trditev 3.75
$$= \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbb{1}(X_n = y)\right]$$

$$= \sum_{y \in S} h(y) \mu_x^*(y) = \sum_{y \in S} h(y) \frac{\pi^*(y)}{\pi^*(x)} = \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}$$

Po klasičnem KZVŠ gre $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_m}{m} \xrightarrow[m \to \infty]{s.g.} \frac{\pi^*(h)}{\pi^*(x)}$.

Omejimo: $\sum_{k=0}^{V(n)-1} C_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} h(X_i) \leq \sum_{k=0}^{V(n)} C_k$

$$A_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=1}^{V(n)} C_k ; & V(n) > 0 \\ 1 ; & V(n) = 0 \end{cases} \qquad \tilde{A}_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=0}^{V(n)-1} C_k ; & V(n) > 0 \\ 1 ; & V(n) = 0 \end{cases}$$

Velja $A_n, \tilde{A}_n \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}$.

$$\frac{V(n)}{n} \tilde{A}_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h(X_i) \leq \frac{C_0}{n} + \frac{V(n)}{n} A_n$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\cancel{\pi^*(x)} \frac{\pi^* h}{\cancel{\pi^*(x)}} \qquad\qquad 0 + \cancel{\pi^*(x)} \frac{\pi^* h}{\cancel{\pi^*(x)}}$$

$\blacksquare$

8. december 2025

Opomba:

$$\frac{Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} \mathbb{E}(Y_1)$$

lahko ima drugačno porazdelitev in lahko je odvisna od $Y_1, Y_2, \dots$

(podrobnosti v zapiskih na spletni učilnici)

Izrek 3.77 [o dominirani konvergenci za slučajne spremenljivke]: Naj zaporedje spr. $Y_1, Y_2, \dots$ skoraj gotovo konvergira proti Y in naj bo $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}} |Y_n|] < \infty$. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y)$.

Posledica 3.78: Naj bo $X_0, X_1, \dots ; (\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ nerazcepna markovska veriga s stacionarno porazdelitvijo π^* in $h: S \longrightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija. Če je π še ena verjetnostna mera na S, velja:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_\pi[h(X_0)] + \mathbb{E}_\pi[h(X_1)] + \dots + \mathbb{E}_\pi[h(X_{n-1})]}{n}}_{\text{Cesàrova limita zaporedja } \mathbb{E}_\pi[h(X_n)] = \pi P^n h} = \pi^* h.$$

Ali je tudi kar $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\pi[h(X_n)] = \pi^* h$?
Med drugim, če vzamemo $h = \mathbb{1}_{\{x\}}$, ali je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\pi(X_n = x) = \pi^*(x)$?
Ne nujno.

Banalen protiprimer: $S = \{a, b\}$, $p_{a,b} = p_{b,a} = 1$

$$\mathbb{P}_a(X_n = a) = \begin{cases} 1; & n \text{ sod} \\ 0; & n \text{ lih} \end{cases}$$

3.8. Periodičnost

Označimo $x \xrightarrow[n]{} y$, če lahko iz x v y pridemo v natanko n korakih, tj. $\mathbb{P}_x(X_n = y) = 0$.

Definicija: Za $A \subseteq \mathbb{N}$ definirajmo $\gcd A := \sup\{d \in \mathbb{N} \mid \forall n \in A.\ d \mid n\}$ in $\gcd \emptyset := \emptyset$.

Definicija: Perioda stanja x v MV $X_0, X_1, \dots ; (\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ je $\gcd I(x)$, kjer je $I(x) := \{n \in \mathbb{N} \mid x \xrightarrow[n]{} x\}$. Za stanje s periodo 1, pravimo, da je aperiodično.

Trditev 3.79: $x \xrightarrow[n]{} y,\ y \xrightarrow[m]{} z \Rightarrow x \xrightarrow[n+m]{} z$.

Dokaz: DV.

Posledica 3.80: Množica $I(x)$ je aditivna: za $m, n \in I(x)$ je tudi $m+n \in I(x)$.

Trditev 3.81: Če je množica $A \subseteq \mathbb{N}$ aditivna in je $\gcd A = 1$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $n \in A$.

Dokaz: Ker je $\gcd A = 1$, obstajajo taki $n_1, n_2, \dots, n_r \in A$ in $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$, da je $c_1 n_1 + \dots + c_r n_r = 1$ (rezultat iz teorije števil). Pišimo $\sum_{i;\, c_i > 0} c_i n_i = 1 - \sum_{i;\, c_i < 0} c_i n_i$. Za število $s := \sum_{i;\, c_i < 0} |c_i| n_i$ velja $s \in A$, brž ko je $s > 0$, in $s + 1 \in A = \sum_{i;\, c_i > 0} c_i n_i \in A$ zagotovo, ker je $s+1 > 0$. Če je $s = 0$, je $1 \in A$, potem pa mora biti $A = \mathbb{N}$. Naj bo $s > 0$ in $n \geq n_0 := s^2$. Izrazimo $n = qs + t$, kjer je $q \in \{s, s+1, \dots\}$ in $t \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Velja $n = (q-t)s + t(s+1) \in A$. $\blacksquare$

Posledica 3.82: Če je stanje $x \in S$ aperiodično in $x \rightarrow y$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $x \xrightarrow[n]{} y$.

Trditev 3.83: Če sta stanji x in y povezani ($x \longleftrightarrow y$), je $\gcd(I(x)) = \gcd(I(y))$.

Dokaz: Po opazki 3.23 obstajata taka $k, l \in \mathbb{N}$, da je $x \xrightarrow[k]{} y$ in $y \xrightarrow[l]{} x$.

Po trditvi 3.79 dobimo: $k + l \in I(x)$ in $l + k \in I(y)$.

- $n \in I(x) \Rightarrow n+l+k \in I(y)$
- $n \in I(y) \Rightarrow n+l+k \in I(x)$

Če d deli vse elemente iz $I(x)$, mora deliti tudi $k+l$. Če je $n \in I(y)$, potem d deli $n+k+l \in I(x)$, torej d deli n. Če torej d deli vse elemente iz $I(x)$, deli tudi vse elemente iz $I(y)$. Zamenjamo x in y, in dobimo ekvivalenco. Sledi $\gcd(I(x))=\gcd(I(y))$. ▨

3.9. Produktne markovske verige

Definicija: Za meri μ in ν na števnih množicah S in T definiramo produktno mero $\mu \otimes \nu$ na $S \times T$ po predpisu $(\mu \otimes \nu)(x,y) := \mu(x)\nu(y)$.

Opazka 3.84: Slučajni spremenljivki $X \sim \pi$ in $Y \sim \rho$ sta neodvisni $\Leftrightarrow (X,Y) \sim \pi \otimes \rho$. $\mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$

Definicija: Produktna markovska veriga na produktnem prostoru $S \times T$ je markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi oblike $P_{(x,u),(y,v)} = p^{(1)}_{x,y} \cdot p^{(2)}_{u,v}$, kjer velja

- $\forall x,y \in S.\ p^{(1)}_{x,y} \geq 0,\ \forall x \in S.\ \sum_{y \in S} p^{(1)}_{x,y} = 1.$
- $\forall u,v \in T.\ p^{(2)}_{u,v} \geq 0,\ \forall u \in T.\ \sum_{v \in T} p^{(2)}_{u,v} = 1.$

Trditev 3.85: Če je $(X_0,U_0),(X_1,U_1),\dots$ produktna markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo in prehodnimi verjetnostmi kot prej, potem je $X_0,X_1,\dots$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p^{(1)}_{x,y}$; $U_0,U_1,\dots$ pa markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p^{(2)}_{u,v}$. Če sta X_0 in U_0 neodvisni, sta neodvisna tudi celotna procesa $X_0,X_1,\dots$ in $U_0,U_1,\dots$

Dokaz: $\mathbb{P}(X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n, X_{n+1}=y) =$

$$= \sum_{u\in T}\sum_{v\in T} \mathbb{P}(\underbrace{X_0=x_0, X_1=x_1,\dots, X_n=x_n, Y_n=u}_{((X_0,V_0),\dots,(X_{n-1},V_{n-1}))\in\mathcal{J},\ (X_n,Y_n)=(x_n,u)}, \underbrace{X_{n+1}=y, Y_{n+1}=v}_{(X_{n+1},Y_{n+1})=(y,v)})$$

2\. pogojevanje

$$= \sum_{u\in T}\sum_{v\in T} \mathbb{P}(X_0\in x_0, X_1\in x_1,\dots, X_n\in x_n)\, p_{(x_n,u),(y,v)}$$

$$= \sum_{u\in T} \mathbb{P}(X_0=x_0, X_1=x_1,\dots, X_n=x_n, Y_n=u)\, p^{(1)}_{x_n,y} \underbrace{\sum_{v\in T} p^{(2)}_{u,v}}_{=1}$$

$$= \mathbb{P}(X_0=x_0, X_1=x_1,\dots, X_n=x_n)\, p^{(1)}_{x_n,y}$$

Sledi, da je $X_0, X_1,\dots$ markovska veriga z ustreznimi prehodnimi verjetnostmi. Enako dokažemo za $V_0, V_1,\dots$

Za neodvisnost procesov je dovolj dokazati neodvisnost zaporedij $X_0, X_1,\dots, X_n$ in $V_0, V_1,\dots, V_n$ za vse n.

$$\mathbb{P}((X_0, X_1,\dots, X_n)=(x_0,\dots,x_n), (V_0,\dots,V_n)=(u_0,\dots,u_n)) =$$

$$= \mathbb{P}((X_0,V_0)=(x_0,u_0), (X_1,U_1)=(x_1,u_1),\dots, (X_n,V_n)=(x_n,u_n))$$

$$= \mathbb{P}((X_0,U_0)=(x_0,u_0))\cdot p_{(x_0,u_0)(x_1,u_1)}\cdots p_{(x_{n-1},u_{n-1}),(x_n,u_n)}$$

neodvisnost X_0, V_0

$$= \mathbb{P}(X_0=x_0)\cdot\mathbb{P}(V_0=u_0)\, p^{(1)}_{x_0x_1}\, p^{(2)}_{u_0u_1}\cdots p^{(1)}_{x_{n-1}x_n}\, p^{(2)}_{u_{n-1}u_n}.$$

$$= \mathbb{P}(X_0=x_0, X_1=x_1,\dots, X_n=x_n)\cdot\mathbb{P}(V_0=u_0, V_1=u_1,\dots, V_n=u_n)$$

$X_0, X_1,\dots;\ V_0, V_1,\dots$ sta markovski verigi

$$= \mathbb{P}((X_0, X_1,\dots, X_n)=(x_0,x_1,\dots,x_n), (V_0, V_1,\dots,V_n)=(u_1,\dots,u_n)).$$

■

Trditev 3.86: Če je μ invariantna mera markovskih verig s prehodnimi verjetnostmi $p^{(1)}_{x,y}$ in γ invariantna mera markovskih verig s prehodnimi verjetnostmi $p^{(2)}_{u,v}$, je $\mu\otimes\gamma$ invariantna mera markovskih verig s prehodnimi verjetnostmi $p_{(x,u)(y,v)}=p^{(1)}_{x,y}\cdot p^{(2)}_{u,v}$.

Dokaz:

$$\sum_{(x,u)\in S\times T}(\mu\otimes\gamma)(x,u)\, p_{(x,u)(y,v)} \overset{?}{=} (\mu\otimes\gamma)(y,v)$$

$$\| $$

$$\sum_{x\in S}\sum_{u\in T} \mu(x)\,\gamma(v)\, p^{(1)}_{x,y}\, p^{(2)}_{u,v}$$

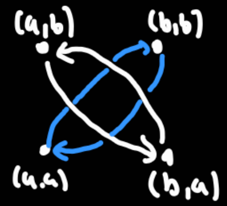
$$\| $$

$$\sum_{x\in S}\mu(x)\, p^{(1)}_{x,y} \sum_{u\in T}\gamma(u)\, p^{(2)}_{u,v} = \mu(y)\,\gamma(v) = (\mu\otimes\gamma)(y,v).$$

■

Trditev 3.87: Produktne markovske verige s prehodnimi verjetnostmi $p_{(x,u)(y,v)} = p^{(1)}_{x,y}\, p^{(2)}_{u,v}$ so nerazcepne, brž ko so tako markovske verige s prehodnimi verjetnostmi $p^{(1)}_{x,y}$ kot tudi markovske verige s prehodnimi verjetnostmi $p^{(2)}_{u,v}$ nerazcepne in aperiodične.

Protiprimer: $S = T = \{a,b\}$, $p^{(1)}_{a,b} = p^{(2)}_{a,b} = p^{(1)}_{b,a} = p^{(2)}_{b,a} = 1$.



$$p_{(a,a)(a,b)} = p^{(1)}_{a,a}\, p^{(2)}_{a,b} = 0 \cdot 1 = 1$$

Torej nerazcepnost ni zadosten pogoj (potrebujemo aperiodičnost).

Dokaz trditve 3.87: Za poljubna $x,y \in S$ in $u,v \in T$ je treba dokazati $(x,u) \longrightarrow (y,v)$. Ker sta verigi nerazcepni in aperiodični, po posledici 3.82 obstajata taka n_1 in n_2, da za poljuben $n \geq n_1$ velja $x \xrightarrow[n]{} y$ in za $n \geq n_2$ velja $u \xrightarrow[n]{} v$. Postavimo $n := \max\{n_1, n_2\}$. Po trditvi 3.26 obstajata taki verigi $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ in $u = w_0, w_1, \ldots, w_n = v$, da je $p^{(1)}_{z_{k-1} z_k} > 0$ in $p^{(2)}_{w_{k-1} w_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$. Potem pa je tudi $p_{(z_{k-1}, w_{k-1})(z_k, w_k)} > 0$ za vse $k = 1, \ldots, n$. Sledi $(x,u) \xrightarrow[n]{} (y,v)$. ▨

3.10 Konvergenca v porazdelitvi

Definicija: Markovska veriga je *ergodična*, če je nerazcepna, pozitivno povrnljiva in aperiodična.

Za ergodične markovske verige bomo dokazali:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_{\pi}(X_n = x) = \pi^*(x).$$

še ena verjetnostna mera na S

Iz linearnosti in izreka o dominirani konvergenci sledi:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}_{\pi}}_{\text{začetna porazdelitev (poljubna)}}[h(X_n)] = \overbrace{\pi^*}^{\text{stacionarna porazdelitev}} h$$

za vsako omejeno funkcijo $h: S \longrightarrow \mathbb{R}$.

15. december 2025

<u>Definicija</u>: Naj bodo $X_0, X_1, \ldots$ in X slučajni elementi z vrednostmi v množici S, ki ima strukturo topološkega prostora, ne pa nujno definirani na istem verjetnostnem prostoru Ω. Zaporedje $X_0, X_1, \ldots$ **konvergira v porazdelitvi** proti X, če za vsako zvezno in omejeno funkcijo $h: S \longrightarrow \mathbb{R}$ velja $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)]$. Pišemo $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.
d/w/š

$$\begin{tikzcd} \Omega_0 \arrow[dr, "X_0"] & \\ \Omega_1 \arrow[r, "X_1"] & S \\ \vdots & \\ \Omega \arrow[uur, "X"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Definicija</u>: Zaporedje verjetnostnih mer $\pi_0, \pi_1, \ldots$ na topološkem prostoru S **šibko konvergira** proti verjetnostni meri π na S, če za neki ($\Leftrightarrow$ vsak) nabor slučajnih spremenljivk $X_0 \sim \pi_0$, $X_1 \sim \pi_1, \ldots, X \sim \pi$ velja $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$. Pišemo $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d/w/š} \pi$, pogosto tudi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi$.

<u>Tehnična opomba</u>: Na topološkem prostoru S gledamo Borelovo σ-algebro. V našem primeru, ko je S števna, pa privzamemo diskretno topologijo; pripadajoča σ-algebra je tedaj 2^S in vse funkcije iz $S \longrightarrow \mathbb{R}$ so zvezne.

Dokazali bomo torej, da gre $\pi P^n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}_{\pi}[h(X_n)]}_{\pi P^n h} = \pi^* h$$

<u>Izrek 3.88</u>: Če je $X_0, X_1, \ldots; (\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ aperiodična nerazcepna markovska veriga s prehodno matriko P in stacionarno porazdelitvijo π^* ter π še ena verjetnostna mera na S, za poljubna $a \le b$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{h: S\to[a,b]} \Big| \underbrace{\mathbb{E}_{\pi}[h(X_n)]}_{\pi P^n h} - \pi^* h \Big| = 0.$$

Opazka 3.89: Izrek 3.88 je dovolj dokazati za $a=0$ in $b=1$:
Če je kar $a=b$, je tako ali tako $\pi P^n h = \pi^* h = a = b$. Pri $a<b$ pa za $h: S \longrightarrow [a,b]$ definiramo $\tilde{h}(x) := \frac{h(x)-a}{b-a} : S \longrightarrow [0,1]$.

$h(x) = a + (b-a)\tilde{h}(x)$, $\quad \pi P^n h = a + (b-a)\pi P^n \tilde{h}$

$$\pi^* P^n h = a + (b-a)\pi^* P^n \tilde{h}$$

$$\Rightarrow |\pi P^n h - \pi^* h| = (b-a)|\pi P^n \tilde{h} - \pi^* \tilde{h}|.$$

Definicija: Na prostoru verjetnostnih mer na merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$ definirajmo metriko totalne variacije:

$$d_{TV}(\pi, \rho) := \sup_{A \in \mathcal{S}} |\pi(A) - \rho(A)|.$$

$X \sim \pi$, $Y \sim \rho$: $\quad d_{TV}(\pi, \rho) = \sup_{A \in \mathcal{S}} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|.$

$\mathcal{L}_X^{(\mathbb{P})}$:= porazdelitev slučajne spremenljivke (pri verjetnostni meri $\mathbb{P}$)
$\overset{\shortparallel}{X_* \mathbb{P}} = \mathbb{P}_X$ $\quad$ ($\mathcal{L}$ ... law)

Opazka 3.90: d_{TV} je res metrika. (DN)

Od zdaj naprej se omejimo na primer, ko je S števna in $\mathcal{S} = 2^S$.

Trditev 3.91: Supremum v definiciji $d_{TV}(\pi, \rho)$ je dosežen (tudi) pri $A = A_\pi = \{x \in S \mid \pi(x) > \rho(x)\}$ in pri $A = A_\rho = \{x \in S \mid \rho(x) > \pi(x)\}$.
Poleg tega je: $d_{TV}(\pi, \rho) = \sum_{x \in S} \max\{\pi(x) - \rho(x), 0\} = \sum_{x \in S} \max\{\rho(x) - \pi(x), 0\}$
$= \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |\pi(x) - \rho(x)|.$

Dokaz. Množica S je disjunktna unija A_π, A_ρ in $A_= := \{x \mid \pi(x) = \rho(x)\}$.

- $\pi(A_=) = \rho(A_=)$
- $\underbrace{\pi(A_\pi) + \pi(A_\rho) + \pi(A_=)}_{\pi(S) = 1} = \underbrace{\rho(A_\pi) + \rho(A_\rho) + \rho(A_=)}_{\rho(S) = 1}$

$$\Rightarrow \pi(A_\pi) - \rho(A_\pi) = \rho(A_\rho) - \pi(A_\rho)$$

Za poljubno množico $A \subseteq S$ velja:

$$\pi(A) - \rho(A) = \sum_{x \in A} (\pi(x) - \rho(x)) \leq \sum_{x \in A_\pi} (\pi(x) - \rho(x)) = \pi(A_\pi) - \rho(A_\pi)$$

Podobno $\rho(A) - \pi(A) \leq \rho(A_\rho) - \pi(A_\rho)$.

Sledi:

$$|\pi(A) - \rho(A)| \leq \max\{\pi(A_\pi) - \rho(A_\pi), \rho(A_\pi) - \pi(A_\rho)\}.$$
$$= |\pi(A_\pi) - \rho(A_\pi)|$$
$$= |\rho(A_\rho) - \pi(A_\rho)|$$

Torej je:

$$d_{TV}(\pi, \rho) = \sum_{\substack{x \in S \\ \pi(x) \geq \rho(x)}} (\pi(x) - \rho(x)) = \sum_{\substack{x \in S \\ \pi(x) - \rho(x) > 0}} (\pi(x) - \rho(x)) = \sum_{x \in S} \max\{\pi(x) - \rho(x), 0\}.$$

Podobno $= \sum_{x \in S} \max\{\rho(x) - \pi(x), 0\}$.

Povprečimo zadnji dve enakosti in dobimo

$$d_{TV}(\pi, \rho) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \left(\max\{\pi(x) - \rho(x), 0\} + \max\{\rho(x) - \pi(x), 0\}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |\pi(x) - \rho(x)|$$

▨

<u>Definicija</u>: Sklapljanje (ang. coupling) verjetnostne mere π na $(S, \mathcal{S})$ in verjetnostne mere ρ na $(T, \mathcal{T})$ je taka verjetnostna mera σ na $(S \times T, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$, da za $(X, Y) \sim \sigma$ velja $X \sim \pi$ in $Y \sim \rho$.

Omejimo se na števne prostore in σ-algebre, ki so potenčne množice.

<u>Trditev 3.92</u>: Velja:

$$d_{TV}(\pi, \rho) = \sup_{h: S \to [0,1]} |\pi h - \rho h| = \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y);\ X \sim \pi,\ Y \sim \rho \text{ sta definirani na istem verjetnostnem prostoru}\}$$

Pred dokazom si oglejmo primer.

<u>Primer</u>: $a \neq b$, $p, q \in [0,1]$, $\pi = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-q & q \end{pmatrix}$

$\pi(\emptyset) - p(\emptyset) = 0$, $\pi(\{a,b\}) - \rho(\{a,b\}) = 0$

$\pi(\{a\}) - \rho(\{a\}) = q - p$, $\pi(\{b\}) - \rho(\{b\}) = p - q$

$\Rightarrow d_{TV}(\pi, \rho) = |p-q|$

Sklapljanje pri katerem je $\mathbb{P}(X \neq Y) = |p-q|$:

	$Y=a$	$Y=b$	
$X=a$	$\min\{1-p,1-q\} = 1-\max\{p,q\}$	$q - \min\{p,q\} = \max\{p,q\} - p$	$1-p$
$X=b$	$1-\min\{1-p,1-q\} = \max\{p,q\} - q$	$\min\{p,q\}$	p
	$1-q$	q	

<u>Delni dokaz trditve 3.92:</u>

$$d_{TV}(\pi,\rho) \overset{(1)}{\leq} \sup_{h: S \to [0,1]} |\pi h - \rho h| \overset{(2)}{\leq} \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y);\ X \sim \pi, Y \sim \rho \text{ na istem } \Omega\} \overset{(3)}{\leq} d_{TV}(\pi,\rho)$$

(1): Očitno, saj je $d_{TV}(\pi,\rho) = \sup\limits_{A \subseteq S} |\pi(A) - \rho(A)| = \sup\limits_{A \subseteq S} |\pi \mathbb{1}_A - \rho \mathbb{1}_A|$.

(2): Za poljubno funkcijo $h: S \longrightarrow [0,1]$ ter slučajni spremenljivki $X \sim \pi$ in $Y \sim \rho$ na istem verjetnostnem prostoru velja:

$$|\pi h - \rho h| = |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]| \underset{\text{isti verjetnostni prostor}}{=} |\mathbb{E}[h(X) - h(Y)]| \leq \mathbb{E}[|h(X) - h(Y)|] =$$

$$= \mathbb{E}[\overbrace{|h(X) - h(Y)|}^{\leq 1} \mathbb{1}(X \neq Y)] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}(X \neq Y)] = \mathbb{P}(X \neq Y).$$

Naredimo supremum po h ter infimum po X in Y. Dobimo (2).

(3) Dovolj je konstruirati sklapljanje, pri katerem bo $\mathbb{P}(X \neq Y) = d_{TV}(\pi,\rho)$. Za $\pi = \rho$ je lahko to kar trivialno sklapljanje, pri katerem je $X = Y \sim \pi = \rho$. Za $\pi \neq \rho$ pa bodi to sklapljanje, pri katerem je $(X,Y) \sim \sigma$, kjer je:

$$\sigma(x,y) := \begin{cases} \min\{\pi(x), \rho(x)\} & ;\ x = y \\ \dfrac{\max\{\pi(x) - \rho(x), 0\} \cdot \max\{\rho(y) - \pi(y), 0\}}{d_{TV}(\pi,\rho)} & ;\ x \neq y \end{cases}$$

Preverimo: • $\sigma(x,y) \geq 0$ ✓

- $\sum_{y \in S} \sigma(x,y) = \pi(x), \quad \sum_{x \in S} \sigma(x,y) = \rho(x)$

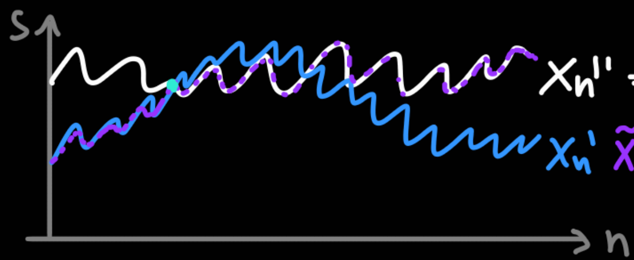
- $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{\substack{x,y \in S \\ x \neq y}} \sigma(x,y) = d_{TV}(\pi, \rho).$

Podrobnosti izpustimo, v nadaljevanju tega ne potrebujemo. ▨

Opazka 3.93: Iz opazke 3.89 in trditve 3.92 sledi, da je izrek 3.88 ekvivalenten trditvi $\lim_{n \to \infty} d_{TV}(\pi P^n, \pi^*) = 0$.

Dokaz trditve 3.88: Dovolj bo na istem verjetnostnem prostoru konstruirati slučajne spremenljivke $\tilde{X}_n' \stackrel{d}{=} X_n$, tj. $\tilde{X}_n' \sim \pi P^n$, in $\tilde{X}_n'' \sim \pi^*$, za katere je $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\tilde{X}_n' \neq \tilde{X}_n'') = 0$.

Vzemimo produktno markovsko verigo $(X_0', X_0''), (X_1', X_1''), \ldots$ na $S \times S$ s prehodnimi verjetnostmi $\tilde{p}_{(x', x''), (y', y'')} = p_{x', y'} \cdot p_{x'', y''}$. Po trditvi 3.85 sta tedaj $X_0', X_1', \ldots$ in $X_0'', X_1'', \ldots$ pri meri $\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}$ markovski verigi, obe s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, prva z začetno porazdelitvijo π, druga s stacionarno porazdelitvijo π^*. Torej je po opombi 2.1 velja $X_n' \stackrel{d}{=} X_n$ pri $\mathbb{P}_\pi$, torej $X_n' \sim \pi P^n$, in $X_n'' \sim \pi^*$.



Ker je prvotna markovska veriga nerazcepna in aperiodična, je po trditvi 3.87 tudi produktna markovska veriga nerazcepna. Po trditvi 3.86 pa ima produktna markovska veriga tudi stacionarno porazdelitev $\pi \otimes \pi^*$, zato so po trditvi 3.68 njena stanja povrnljiva. Po trditvi 3.39 potem za poljubna stanja x', x'', y', y'' velja $(x', x'') \longrightarrow (y', y'')$. Potem pa je tudi $\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}(T_\Delta < \infty) = 1$, kjer je $\Delta = \{(x,x) \mid x \in S\} \subseteq S \times S$.

Definirajmo $\tilde{X}_n' \begin{cases} X_n' & ; \quad n \le T_\Delta \\ X_n'' & ; \quad n \ge T_\Delta \end{cases}$, $\tilde{X}_n'' = X_n''$

Velja $\{\tilde{X}_n' \ne \tilde{X}_n''\} = \{T_\Delta > n\}$

Dokazati je treba, da je $\tilde{X}_0', \tilde{X}_1', \ldots$ pri $\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}$ prav tako markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$. Tedaj bo res $\tilde{X}_n' \sim \pi P^n$.

22. december 2025

Naj bo $Y_n' = \tilde{X}_n' = \begin{cases} X_n' : & n \le T_\Delta \\ X_n'' ; & n \ge T_\Delta \end{cases}$, $Y_n'' = \begin{cases} X_n'' ; & n \le T_\Delta \\ X_n' ; & n \ge T_\Delta \end{cases}$.

Trdimo, da je $(Y_0', Y_0''), (Y_1', Y_1''), \ldots$ pri verjetnostni meri $\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}$ markovska veriga z začetno porazdelitvijo $\pi \otimes \pi^*$ in prehodnimi verjetnostmi $\tilde{p}_{(x',x''),(y',y'')}$. Očitno je $(Y_0', Y_0'') = (X_0', X_0'') \sim \pi \otimes \pi^*$. ✓

$n = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0', x_1', \ldots, x_n', y' \in S$, $x_0'', x_1'', \ldots, x_n'', y'' \in S$.

Preveriti moramo, da velja

$$\mathbb{P}\big((Y_{n+1}', Y_{n+1}'') = (y', y'') \mid \underbrace{(Y_0', Y_0'') = (x_0', x_0''), \ldots, (Y_n', Y_n'') = (x_n', x_n'')}\big) = p_{x_n', y'} p_{x_n'', y''},$$

brž ko ima ta dogodek nenićelno verjetnost.

$m = 0, 1, \ldots, n$:

$B_m := \{(Y_0', Y_0'') = (x_0', x_0''), \ldots, (Y_n', Y_n'') = (x_n', x_n''), T_\Delta = m\}$.

$B_+ := \{(Y_0', Y_0'') = (x_0', x_0''), \ldots, (Y_n', Y_n'') = (x_n', x_n''), T_\Delta > n\}$.

Po trditvi 1.3 je dovolj preveriti, da je

$\mathbb{P}((Y_{n+1}', Y_{n+1}'') = (y', y'') \mid B_m) = p_{x_n', y'} p_{x_n'', y''}$ in

$\mathbb{P}((Y_{n+1}', Y_{n+1}'') = (y', y'') \mid B_+) = p_{x_n', y'} p_{x_n'', y''}$,

brž ko je $\mathbb{P}(B_m) > 0$ oziroma $\mathbb{P}(B_+) > 0$. Če je $\mathbb{P}(B_m) > 0$, je tudi

$$\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}((Y_{n+1}', Y_{n+1}'') = (y', y'') \mid B_m) =$$

$$= \mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}\left((X_{n+1}'', X_{n+1}') = (y', y'') \,\middle|\, \begin{array}{l} (X_0', X_0'') = (x_0', x_0''), \ldots, (X_{m-1}', X_{m-1}'') = (x_{m-1}', x_{m-1}'') \\ (X_m'', X_m') = (x_m', x_m''), \ldots, (X_n'', X_n') = (x_n', x_n'') \end{array}\right)$$

$$= p_{x_n'', y''} p_{x_n', y'}.$$

$$\mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}((Y_{n+1}', Y_{n+1}'') = (y', y'') \mid B_+) =$$

$$= \mathbb{P}_{\pi \otimes \pi^*}((X_{n+1}', X_{n+1}'') = (y', y'') \mid (X_0', X_0'') = (x_0', x_0''), \ldots, (X_n', X_n'') = (x_n', x_n''))$$

$$= p_{x_n', y'} p_{x_n'', y''}$$

■

3.11. Metropolis-Hastingsov algoritem

Ciljna porazdelitev: π^*

Poseben primer MCMC metode (Markov Chain Monte Carlo).

Primer: G graf - neusmerjen in brez zank. Vsako vozlišče grafu je lahko v enem izmed stanj iz dane množice A.

$$S = A^{V(G)}$$

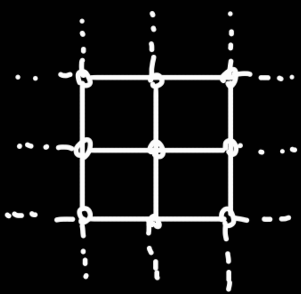
Konfiguracija $x \in S$: $\qquad x : V(G) \longrightarrow A$

$$\underbrace{A = \{-1, 1\},\ |V(G)| = 1000}_{\text{razumno velik graf}} \qquad \underbrace{|S| = 2^{1000} \approx 10^{301}}_{\text{nerazumno število konfiguracij}}$$

$$\pi^*(x) = \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(S)} \qquad \mu^*(x) = \prod_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} g(x(u), x(v))$$

$$g : A \times A \longrightarrow (0, \infty) \text{ simetrična}$$

Isingov model: $A = \{-1, 1\}$



tu ne moremo enostavno generirati porazdelitve

$$g(a,b) = e^{-\frac{\text{energija interakcije med } a \text{ in } b}{\text{temperatura}}}$$

Metropolis-Hastingsov algoritem:

nerazcepna markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $q_{x,y}$ $\longrightarrow$ ergodična markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in stacionarno porazdelitvijo π^*

Privzamemo: * $\pi^*(x) > 0$ za vse $x \in S$

* še en mil pogoj na $q_{x,y}$

$$p_{x,y} := \begin{cases} q_{x,y} r_{x,y}; & x \neq y \\ q_{x,x} + \sum\limits_{\substack{z \in S \\ z \neq x}} q_{x,z}(1 - r_{x,z}); & x = y \end{cases}$$

Prvotno markovsko verigo modificiramo tako, da prehod iz x v $y \neq x$ z verjetnostjo $r_{x,y}$ sprejmemo, sicer pa ga zavrnemo, kar pomeni, da ostanemo v x.

$$r_{x,y} = \min\left\{\frac{\pi^*(y)\cdot q_{y,x}}{\pi^*(x)\, q_{x,y}}, 1\right\} \qquad (\text{če je } q_{x,y} > 0;\ \text{sicer } p_{x,y} = 0)$$

Prvi dodatni pogoj: $\forall x,y \in S.\ x \neq y \Rightarrow \exists x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y \quad \forall k = 1,2,\ldots,n.$
$p_{x_{k-1},x_k} > 0$ in $p_{x_k,x_{k-1}} > 0$

Opazka 3.94: Pri 1. dodatnem pogoju je tudi nova markovska veriga nerazcepna.

Opazka 3.95: Nova markovska veriga je pri π^* v točni izravnavi:

$$\begin{array}{ccc}
\pi^*(x)\, p_{x,y} & & \pi^*(y)\, p_{y,x} \\
\parallel & & \parallel \\
\pi^*(x)\, q_{x,y}\cdot r_{x,y} & & \pi^*(y)\, q_{y,x}\cdot r_{y,x} \\
\parallel & & \parallel \\
\min\{\pi^*(y)\, q_{x,y}, \pi^*(x)\, q_{x,y}\} & = & \min\{\pi^*(x)\, q_{y,x}, \pi^*(y)\, q_{y,x}\}
\end{array}$$

Po opazki 3.61 je π^* stacionarna porazdelitev nove markovske verige. Le-ta je aperiodična, brž ko je $p_{x,x} > 0$ za neki $x \in S$, to pa je res, brž ko je bodisi $q_{x,x} > 0$ za neki $x \in S$, bodisi izvirna markovska pri meri π^* ni v točni izravnavi.

Primer od prej: $\pi^*(x) = \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(G)}$ $\quad \mu^*(x) = \prod_{\substack{u,v \in V(G) \\ (u,v) \in E(G)}} g(x(u), v(u))$

V izhodiščni markovski verigi naj bo $x \to y$ samo, če obstaja tako vozlišče $w \in V(G)$, da je $x(u) = y(u) =: z(u)$ za vse $u \neq w$.
Za vsak $x \in S$ lahko povsem naključno izberemo eno izmed $|V(G)| \cdot (|A| - 1)$ konfiguracij y, za katere

$\exists w \in V(G).\ y(u) = x(u) \Leftrightarrow u \neq w$

$$\frac{\pi^*(y)}{\pi^*(x)} = \frac{\prod_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} g(y(u), y(v))}{\prod_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} g(x(u), x(v))} = \prod_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} \frac{g(y(u), y(v))}{g(x(u), x(v))}$$

↳ $u \neq v$, ker nimamo zank

$$= \prod_{\substack{v \in V(G) \\ \{w,v\} \in E(G)}} \frac{g(y(w), \overset{z(v)}{\overset{\shortparallel}{y(v)}})}{g(x(w), \underset{z(v)}{\underset{\shortparallel}{x(v)}})} \prod_{\substack{u \in V(G) \\ \{u,w\} \in E(G)}} \frac{g(\overset{z(u)}{\overset{\shortparallel}{y(u)}}, y(w))}{g(\underset{z(u)}{\underset{\shortparallel}{x(u)}}, x(w))}$$

$$= \prod_{\substack{u \in V(G) \\ \{w,u\} \in E(G)}} \frac{g(y(w), z(u))}{g(x(w), z(u))} \prod_{\substack{u \in V(G) \\ \{u,w\} \in E(G)}} \frac{g(z(u), y(w))}{g(z(u), x(w))}$$

g je tipično simetrična (fizika)

$$= \prod_{\substack{u \in V(G) \\ \{w,u\} \in E(G)}} \left(\frac{g(y(w), z(u))}{g(x(w), z(u))} \right)^2$$

to je obvladljiv produkt