2. MARKOVSKE VERIGE S FIKSNO ZAČETNO PORAZDELITVIJO

2.1. Osnovni pojmi

13. oktober 2025

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na diskretni množici stanj s fiksno porazdelitvijo sestavljajo:

- števna množica S – prostor stanj;
- verjetnosti prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- slučajne spremenljivke $X_0, X_1, X_2, \ldots$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $(S, 2^S)$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}$; $x, y \in S$, pri čemer zahtevamo, $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x,y \in S$;
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p_{x_n,y},$$
brž ko je $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$.
- $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.

Porazdelitvi slučajne spremenljivke X_0 pravimo začetna porazdelitev.

Prehodna matrika: $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$

Za matriko $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ za katero je $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$, pravimo, da je stohastična.

Opazka 2.1: Skupna porazdelitev procesa je natančno določena z začetno dobćena z začetno porazdelitvijo in prehodnimi verjetnostmi, saj je [izrek 1.4, opazka 1.8]
$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \cdot p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1} x_n}.$$

Opazka 2.2: Za vsako verjetnostno mero π na $(S, 2^S)$ in za vsako stohastično matriko $P \in [0,1]^{S \times S}$ obstaja taka verjetnostna mera na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$, da je slučajni proces $X_0, X_1, \ldots$ porazdeljen skladno s to mero, markovska veriga z začetno porazdelitvijo π in prehodno matriko P.

produktna σ-algebra

Uporabimo namreč izrek 1.9: če je $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ najprej definiramo končnorazsežne porazdelitve $\mathbb{P}_n$ na $(S^{n+1}, (2^S)^{\otimes(n+1)})$ po predpisu:

$$\mathbb{P}_n\left(\{(x_0, x_1, \ldots, x_n)\}\right) := \pi(\{x_0\})\, p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

Le-te so konsistentne (DV), torej obstaja ustrezna mera $\mathbb{P}_\infty$ na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$. Domača vaja = DV.

Opazka 2.3: Iz trditve 1.3 sledi, da za vsak $x \in S$ in vsak $D \subseteq S^n$ velja

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D,\ X_n = x}_{\substack{\text{disjunktna unija dogodkov oblike} \\ \{X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \ldots,\ X_{n-1} = x_{n-1},\ X_n = x_n\}}}) = p_{x,y}.$$

Med drugim je $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = p_{x,y}$. Nadalje trdi za vsako množico $D \subseteq S^{n+1}$ velja:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D,\ X_n = x}_{\substack{\text{disjunktna unija dogodkov oblike} \\ \{X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \ldots,\ X_n = x\}}}) = p_{x,y}.$$

Trditev 2.4 [razširitev lastnosti Markova na cel proces]:
Pogojno na poljuben dogodek oblike $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$ z neničelno verjetnostjo je $X_n, X_{n+1}, \dots$ spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi, njena začetna porazdelitev pa se seveda ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke X_n glede na $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$.

Dokaz:

$$\mathbb{P}^{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D}\left(X_{n+m+1} = y \mid X_n = x_0,\ X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m\right)$$

$$\overset{(1.2)}{=} \mathbb{P}\Big(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D,\ X_n = x_0,\ X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m}_{(X_0, X_1, \dots, X_{n+m+1}) \in D'}\Big)$$

$$\overset{\text{prejšnja opazka}}{=} p_{x_m, y}.$$

$\blacksquare$

Opomba: Pri pogojevanju lahko Ω zožimo na poljuben dogodek Ω', za katerega je

$$\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega.$$

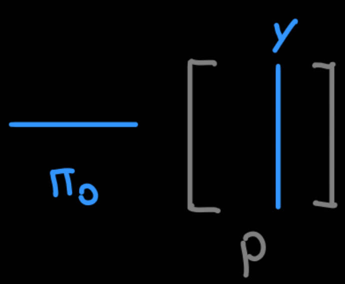
Posledica 2.5: Če s π_n označimo n-to robno porazdelitev, tj. porazdelitev slučajne spremenljivke X_n, je $X_n, X_{n+1}, \dots$ (brezpogojno) spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo π_n. $\blacksquare$

Opazka 2.6:

$$\underset{\pi_1(y)}{\overset{\|}{\pi_1(\{y_1\})}} = \mathbb{P}(X_1 = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in S \\ \mathbb{P}(X_0 = x) > 0}} \mathbb{P}(X_0 = x)\, \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \in S \\ \cancel{\pi_0(\{x\}) > 0}}} \pi_0(\{x\})\, p_{x,y}$$



Če torej prehodne verjetnosti uvrstimo v matriko $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$, robne porazdelitve pa identificiramo z vrstičnimi vektorji, velja $\pi_1 = \pi_0 \cdot P$. Po posledici 2.5 pa je tudi $\pi_{n+1} = \pi_n P$. Z indukcijo sledi $\underline{\pi_n = \pi_0 P^n}$.

<u>Primer</u>: vreme od prejšnjič:

$$P = \begin{array}{r} \\ \text{pretežno jasno} \\ \text{pretežno oblačno} \\ \text{dež} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pre. ja.} & \text{pre. ob.} & \text{dež} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\pi_0 := [1, 0, 0]$$

$$\pi_1 = [1, 0, 0]\, P = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]$$

$$\pi_2 = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]\, P = [0.55 \quad 0.29 \quad 0.16]$$

<u>Primer</u>: slučajni sprehod na $\mathbb{Z}$, $p \in [0, 1]$

$$p_{k,k+1} := p, \quad p_{k,k-1} := 1-p, \quad X_0 = 0$$

$$\begin{aligned} X_n &= \text{št. pomikov navzgor} - \text{št. pomikov navzdol} \\ &= 2 \cdot (\text{št. pomikov navzgor}) - n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{št. pomikov navzgor} \sim \mathrm{Bin}(n, p) \\ \qquad \parallel \\ \quad \frac{X_n + n}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(X_n = -n + 2k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Primer: $\pi_0 := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $P := \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$\pi_0 P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Sledi $\pi_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Definicija: Markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo je *stacionarna*, če so vse robne porazdelitve enake.

Ekvivalentno: $\underbrace{\pi_1}_{\pi_0 P} = \pi_0$. ($\pi_0$ je levi lastni vektor za lastno vrednost 1)

2.2. Časi ustavljanja

Definicija: Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} = \{0,1,2,\dots,\infty\}$ je *čas ustavljanja* glede na slučajni proces $X_0, X_1, \dots$, če za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja, da je dogodek $\{T = n\}$ natančno določen z $X_0, X_1, \dots, X_n$, t.j. če obstaja taka merljiva množica D_n, da je $\{T_n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n\}$.

↳ če ima X_k vrednosti v $(S_k, \mathcal{S}_k)$ zahtevamo $D_n \in \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}_n$.

Primera in protiprimer:

1) Čas zadetja množice $C \in \mathcal{S}$, tj. $T_C := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in C\}$ ob dogovoru $\min \emptyset := \infty$, je čas ustavljanja.

$$\{T = n\} = \{X_0 \notin C, X_1 \notin C, \dots, X_n \notin C, X_n \in C\}$$
$$= \{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \in (C^c)^n \times C\}$$

2) Naj bo $(S, \mathcal{S}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ← Borelova σ-algebra

$T := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n > X_{n-1}\}$ je čas vstavljanja

$$\{T = n\} = \{X_0 > X_1 > X_2 > \dots > X_{n-1} < X_n\}$$

3) $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$T := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_{n+1} > X_n\}$ tipično ni čas vstavljanja (razen, če gre npr. za konstanten proces)

$\{T = n\}$ je odvisno od X_{n+1}

Opazka 2.7: Če so $h_0, h_1, \dots$ injektivne in ohranjajo merljivost (tj. A merljiva $\Leftrightarrow$ $h_n(A)$ merljiva), se časi ustavljanja glede na $X_0, X_1, X_2, \dots$ ujemajo s časi ustavljanja glede na $h_0(X_0), h_1(X_1), \dots$ (DV – malo težje)

Definicija: Filtracija (v diskretnem času z naraščanjem v nedogled) na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je zaporedje σ-algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$.

Definicija: Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ velja $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Definicija: Za vsak slučajni proces $X_0, X_1, \dots$, kjer ima X_n vrednosti v $(S_n, \mathcal{S}_n)$, definiramo njegovo naravno filtracijo:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n;\ D_n \in \underbrace{\mathcal{S}_0 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n}\}.$$

($\mathcal{S}_0 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ written above)

DV: utemelji, da je to res filtracija.

Opazka 2.8: Časi ustavljanja glede na dobčen slučajni proces se ujemajo s časi ustavljanja glede na naravno filtracijo.

Trditev 2.9: Če je T čas ustavljanja in $k \in \mathbb{N}_0$, je $T+k$ prav tako čas ustavljanja.

Dokaz: Za $n = 0, 1, \dots, k-1$ je $\{T+k=n\} = \{T = n-k\} = \underset{\in \mathcal{F}_n}{\emptyset}$.
Za $n = k, k+1, \dots$ pa velja

$$\{T+k=n\} = \{T=n-k\} \subseteq \mathcal{F}_{n-k} \subseteq \mathcal{F}_n \qquad \blacksquare$$

Trditev 2.10: Naj bo T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ in $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ filtracija. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) T je čas ustavljanja glede na $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(2) $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

(3) $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

Dokaz: (2)$\Leftrightarrow$(3): očitno, saj sta si dogodka $\{T \leq n\}$ in $\{T > n\}$ nasprotna

(1)$\Rightarrow$(2):

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{T=k\}}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \quad \text{σ-alg. zaprte za unije}$$

(2)$\Rightarrow$(1):

$$\{T=n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

$\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$

$\blacksquare$

15. oktober 2025

Trditev 2.11: Če sta T in S časa ustavljanja glede na določeno filtracijo, so to tudi $T+S$, $T \vee S := \max\{T, S\}$ in $T \wedge S := \min\{T, S\}$.

Dokaz:

$$\{T+S=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{T=k\}}_{\in\, \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T=n-k\}}_{\in\, \mathcal{F}_{n-k} \subseteq \mathcal{F}_n}$$

$$\{T \vee S \leq n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in\, \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in\, \mathcal{F}_n}$$

$\mathcal{F}_i$ so σ-algebre

$$\{T \wedge S \leq n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in\, \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in\, \mathcal{F}_n}$$

$\blacksquare$

Opazka 2.8½ (zadnjič izpustili)

Konstante iz $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ so tudi časi ustavljanja.

Izrek 2.12 [krepka lastnost Markova]: Naj bo:

- $X_0, X_1, \dots$ časovno homogena markovska veriga na števni množici stanj S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, $x, y \in S$, in fiksno začetno porazdelitvijo
- $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravna filtracija tega procesa; $\mathcal{F}_n = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n \mid D_n \in S^{n+1}\}$
- T čas ustavljanja glede na to filtracijo (ekvivalentno glede na proces $X_0, X_1, \dots$)
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{T=n\} \cap B_n)$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, in $\mathbb{P}(B) > 0$

Pogojno na B (in v verjetnostnem prostoru, ki je zožitev prvotnega na poljuben dogodek Ω', za katerega je $B \subseteq \Omega' \subseteq \{T < \infty\}$) je tedaj slučajni proces $X_T, X_{T+1}, \dots$, spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in fiksno začetno porazdelitvijo, ki je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X_T glede na B.

Opazka 2.13: Med pomembnimi legitimnimi dogodki B so dogodki $\{T \in K\}$, kjer je $K \subseteq \mathbb{N}_0$.

Dokaz izreka 2.12: Preveriti je treba:

$$\mathbb{P}^B(X_{T+m+1} = y \mid X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m) = p_{x_m, y}.$$

$\Vert$ trditev 1.2

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

brž ko je $\mathbb{P}^B(X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \dots, X_{T+m} = x_m) > 0.$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) > 0$$

$$\mathbb{P}(\underline{X_{T+m+1} = y} \mid B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, \underline{X_{T+m} = x_m}\})$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+m+1} = y \mid \overbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n}^{B_n}, \overbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n'}^{T=n}, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m)$$

$$= \underline{p_{x_m, y}} \qquad \text{(Opazka 2.3)}$$

Dogodek $B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_0\}$ pa je števna disjunktna unija dogodkov $B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$. Po trditvi 1.3 mora biti tudi

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) = p_{x_m y}.$$

∎