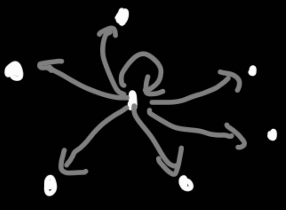
Verjetnost 2

Predavatelj: Martin Raič

pisni izpit $\longrightarrow$ ustni izpit

1. UVOD in OSVEŽITEV TEORIJE VERJETNOSTI

6. oktober 2025



Markovska lastnost:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid \overbrace{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, }^{\text{prednodna stanja}} X_n=x_n) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

naslednje stanje

trenutno stanje

Andrej Andrejevič Markov (1856–1922)

Časovno homogena različica:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

V resnici iz 2. različice sledi 1.

Primer: model vremena

1: pretežno jasno
2: pretežno oblačno, a suho
3: deževno

$p_{x,y}$

x \ y	1	2	3
1	0.7	0.2	0.1
2	0.2	0.6	0.2
3	0.2	0.3	0.5

vsote vrstic morajo biti enake 1

Recimo, da je danes pretežno jasno. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo pojutrišnjem dež?

$$\mathbb{P}(X_2=3 \mid X_0=1) = ?$$

__Trditev 1.1:__ Če je B fiksen dogodek s $\mathbb{P}(B) > 0$ in definiramo $\mathbb{P}^B(A) := \mathbb{P}(B \mid A)$, je $\mathbb{P}^B$ spet verjetnostna mera in jo lahko gledamo na kateremkoli zoženem prostoru Ω', kjer je Ω' dogodek in $B \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$.

__Dokaz:__ DN.

__Trditev 1.2:__ Naj bodo A, B in C dogodki na istem verjetnostnem prostoru. Tedaj je $\mathbb{P}(B) > 0$ in $\mathbb{P}^B(C) > 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Če je slednje res velja trdi $\mathbb{P}^B(A \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)$.

__Dokaz:__ DN.

$$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = \mathbb{P}^{X_0 = 1}(X_2 = 3)$$

trditev 1.1, izrek o popolni verjetnosti

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}^{X_0=1}(X_1 = i)\, \mathbb{P}^{X_0=1}(X_2 = 3 \mid X_1 = i)$$

trditev 1.2

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1, X_1 = i)$$

časovno homogena Markovska lastnost

$$= p_{11} p_{13} + p_{12} p_{23} + p_{13} p_{33}$$

$$= 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.16$$

Kaj pa $\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1)$?

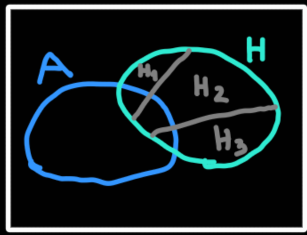
$$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i)$$

$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11} p_{11} + p_{12} p_{21} + p_{13} p_{31} = 0.55$

$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = 0.16$ od prej

$\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1 = 0.29$ $\quad (= 1 - 0.55 - 0.16)$

Trditev 1.3: Če je $0 \leq p \leq 1$, $(H_k)_{k \in K}$ števna družina paroma disjunktnih dogodkov z unijo H s $\mathbb{P}(H) > 0$ ter A tak dogodek, da je $\mathbb{P}(A \mid H_k) = p$, brž ko je $\mathbb{P}(H_k) > 0$, je tudi $\mathbb{P}(A \mid H) = p$.



Dokaz: $K^+ := \{k \in K \mid \mathbb{P}(H_k) > 0\}$

$$\mathbb{P}(A \mid H) = \mathbb{P}^H(A) = \sum_{k \in K^+} \mathbb{P}^H(H_k) \underbrace{\mathbb{P}^H(A \mid H_k)}_{=}$$

$$\mathbb{P}(A \mid H_k \cap H) = \mathbb{P}(A \mid H_k) = p$$

$$= p \sum_{k \in K^+} \mathbb{P}^H(H_k) = p\, \mathbb{P}^H(H) = p. \qquad \blacksquare$$

Iz trditve sledi:

$$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, p_{i,3}$$
$$= 0.55 \cdot 0.1 + 0.29 \cdot 0.2 + 0.16 \cdot 0.5 = 0.193$$

Še nekaj vprašanj:

* $\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = ?$
* Je to zaporedje konvergentno? Če je, kam konvergira?
* Ali je limitno obnašanje verjetnosti $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$, ko gre $n \to \infty$, odvisno od x?
* $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}.\, X_n = y \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_n = y\} \mid X_0 = x) = ?$

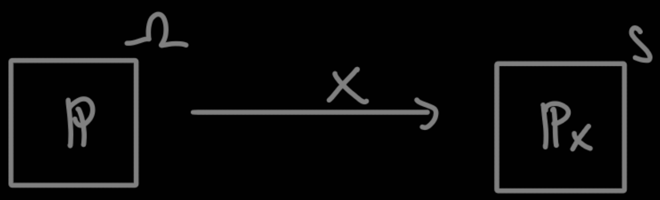
Izrek 1.4 [enoličnost verjetnosti]: Naj bo $\mathcal{A}$ družina podmnožic množice Ω, ki je zaprta za končne preseke, $\mathcal{F}$ pa naj bo Ω algebra generirana z $\mathcal{A}$. Tedaj, če se verjetnostni meri $\mathbb{P}_1$ in $\mathbb{P}_2$ ujemata na $\mathcal{A}$, se ujemata tudi na $\mathcal{F}$.

Rezultat sledi iz Dynkinove leme, znane tudi kot izrek π-λ.

<u>Definicija</u>: Slučajni element na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v množici S, opremljeni s σ-algebro $\mathcal{S}$ (merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$), je $\mathcal{F}/\mathcal{S}$-merljiva preslikava $X: \Omega \longrightarrow S$, tj. za vsako množico $C \in \mathcal{S}$ velja $X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}$.

O diskretnem slučajnem elementu govorimo, če je S števna in $\mathcal{S} = 2^S$.
Za merljivost je tedaj dovolj, da so vse množice $\{X = x\}$ dogodki.

<u>Definicija</u>: Porazdelitev slučajnega elementa X, definiranega kot zgoraj je potisk/slika mere $\mathbb{P}$ vzdolž X, torej verjetnostna mera $\mathbb{P}_X = X_* \mathbb{P}$, definirana po predpisu $\mathbb{P}_X(C) := \mathbb{P}(X \in C)$.



Poznati porazdelitev pomeni poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X \in C)$ za vse $C \in \mathcal{S}$. V resnici jih je treba le za $C \in \mathcal{A}$, kjer je $\mathcal{A}$ družina za končne preseke in generira $\mathcal{S}$.

Borelova σ-algebra

Denimo, če je $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, je za $\mathcal{A}$ dovolj vzeti družino vseh poltrakov $(-\infty, x]$, torej je dovolj poznati $\mathbb{P}(X \leq x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Če je X diskreten slučajni element, je še lažje: tedaj je dovolj poznati $\mathbb{P}(X = x)$ za vse $x \in S$.

<u>Definicija</u>: **Slučajni vektor** je

(1) končen nabor $(X_1, \ldots, X_n)$ slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a z vrednostmi v merljivih prostorih $(S_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (S_n, \mathcal{S}_n)$, ki pa so lahko različni.

ALI EKVIVALENTNO

(2) slučajni element $\underline{X}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\left(\prod_{i=1}^n S_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i\right) = (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}_n)$, kjer je $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i$ σ-algebra, generirana z množicami oblike $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$, kjer je $C_i \in \mathcal{S}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{tikzcd} & S_1 \\ \Omega \arrow[ur, "X_1"] \arrow[r, "X_2"'] \arrow[dr, "X_n"'] & S_2 \\ & \vdots \\ & S_n \end{tikzcd} \qquad \Omega \xrightarrow{\underline{X}} S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

Ekvivalenco določa zveza
$$\underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega vektorja.

<u>Opazka 1.5</u>: Porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$ torej predstavljajo verjetnosti $\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in C)$, dovolj pa je poznati verjetnosti
$$\mathbb{P}(\underbrace{X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \ldots, X_n \in C_n}_{(X_1, \ldots, X_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n}); \quad C_i \in \mathcal{S}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i$

Opazka 1.6: Če so $X_1, X_2, \dots, X_n$ diskretni slučajni elementi, je to tudi slučajni vektor $(X_1, \dots, X_n)$. Za njegovo porazdelitev je dovolj poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$, kjer je $x_i \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Definicija: Slučajni proces v diskretnem času z enostransko neskončnostjo je:

(1) Zaporedje $X_0, X_1, X_2, \dots$ slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a z vrednostmi v merljivih prostorih $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_1, \mathcal{S}_1), (S_2, \mathcal{S}_2), \dots$ ki so lahko različni.

(2) slučajni element $\underline{X}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\left(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i\right) = (S_0 \times S_1 \times S_2, \dots, \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \cdots)$, kjer je $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$ σ-algebra, generirana z množicami oblike $C_0 \times C_1 \times C_2 \times \cdots$, kjer je $C_i \in \mathcal{S}_i$ za $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{tikzcd}
 & S_0 \\
\Omega \arrow[ur, "X_0"] \arrow[r, "X_1"'] \arrow[dr, "X_2"'] & S_1 \\
 & S_2 \\
\vdots &
\end{tikzcd}
\qquad
\Omega \xrightarrow{\underline{X}} S_0 \times S_1 \times S_2 \times \cdots$$

Ekvivalenco določa zveza

$$\underline{X}(\omega) = (X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \dots).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega procesa.

Opazka 1.7: Brž ko ima neskončno množic S_i več kot en element, je produkt $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ nešteven. Slučajni proces v neskončnem času torej tipično ni diskreten slučajni element.

Opazka 1.8: σ-algebra $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$ generirajo že produkti oblike $C_0 \times C_1 \times \cdots \times C_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \cdots$. Družina teh produktov je zaprta za končne preseke. Za porazdelitev slučajnega procesa je torej dovolj poznati verjetnosti

$\mathbb{P}(X_0 \in C_0, X_1 \in C_1, \ldots, X_n \in C_n)$; $C_i \in \mathcal{S}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Če so S_i števne in $\mathcal{S}_i = 2^{S_i}$, pa je dovolj poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$; $x_i \in S_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

POZOR! Ni pa dovolj poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots)$. (te verjetnosti so lahko vse enake 0) recimo, če mečemo pošten kovanec

Izrek 1.9: Naj bodo $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_1, \mathcal{S}_1), \ldots$ merljivi prostori, na produktih $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_0 \times S_1, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2), \ldots$ pa definirane verjetnostne mere $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \ldots$, ki naj bodo konsistentne v smislu, da, če je $(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) \sim \mathbb{P}_{n+1}$, je tudi $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{P}_n$. Tedaj obstaja (natanko ena) verjetnostna mera $\mathbb{P}_\infty$ na $\left(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i\right)$ z lastnostjo, da če je $(X_0, X_1, \ldots) \sim \mathbb{P}_\infty$, je za vse n tudi $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \sim \mathbb{P}_n$.

Dokaz opuščamo. (Daniell, Kolmogorov – poseben primer)