IV. GRASSMANNOVE RAZNOTEROSTI

<u>Definicija</u>: Naj bo $1 \leq \ell \leq n$. Grassmannova raznoterost $Gr(\ell, n)$ je množica vseh ℓ-razsežnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{k}^n$. Ekvivalentno, to je množica vseh $(\ell-1)$-razsežnih podprostorov v $\mathbb{P}^{n-1}$.

Vprašanje: zakaj je to sploh raznoterost?

<u>Primer</u>: $Gr(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$

V naj bo končnorazsežen vektorski prostor nad $\mathbb{k}$.

Definiramo: $T_0 V := \mathbb{k}$

$T_1 V := V$

$T_i V := \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{i\text{-krat}}$ za $i \geq 2$

Če je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V, potem je $\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_i} \mid j_1, \ldots, j_i = 1, \ldots, n\}$ baza za $T_i V$, $\dim T_i V = (\dim V)^i$.

Definiramo še $TV := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_i V$. To je vektorski prostor nad $\mathbb{k}$.

Na TV definiramo množenje tako, da za elementarna tenzorja $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \in T_i V$ in $w_1 \otimes \cdots \otimes w_j \in T_j V$ definiramo $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_j) := (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (u_1 \otimes \cdots \otimes u_j) \in T_{i+j} V$.

To bilinearno razširimo na TV. Na ta način TV postane asociativna in nekomutativna algebra. Pravimo ji tenzorska algebra prostora V. Je tudi stopničasta: $T_i V \cdot T_j V \subseteq T_{i+j} V$.

Od tu naprej predpostavimo: $\boxed{\operatorname{char} \mathbb{k} = 0.}$

V TV definiramo ideal $I_S = (u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V)$.

$SV := TV / I_S$ je komutativna algebra, ki ji rečemo simetrična algebra prostora V. Če je $\dim V = n$, potem je $SV = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$.

Vsaka permutacija $\pi \in S_i$ (kjer je S_i simetrična grupa na i elementih) inducira $\overline{\pi}: T_iV \longrightarrow T_iV$, ki je na elementarnih tenzorjih podana s predpisom $\overline{\pi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) = v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(i)}$.
Definiramo $S_iV := \{T \in T_iV \mid \overline{\pi}(T) = T \quad \forall \pi \in S_i\}$. Elementom S_iV rečemo simetrični tenzorji. S_iV je vektorski podprostor v T_iV. Velja: $SV \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_iV$ kot vektorska prostora. Pri tej identifikaciji je S_iV množica homogenih polinomov stopnje i. V TV definiramo še ideal $I_a = (u \otimes v + v \otimes u \mid u, v \in V)$.
Kvocientna algebra se imenuje zunanja algebra (exterior algebra) prostora V. Oznaka: $\Lambda V = TV/I_a$.
↑klin

Ekvivalenčni razred od $u \otimes v$ označimo z $u \wedge v$.
Za vsak $u \in V$ je $u \otimes u \in I_a$.
Opazimo: $I_a \cap T_0V = \{0\}$, $I_a \cap T_1V = \{0\}$.
ΛV je kot vektorski prostor izomorfen $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i V$, kjer je
$\Lambda^0 V = \Bbbk$, $\Lambda^1 V = V$, $\Lambda^i V = \{T \in T_iV \mid \overline{\pi}(T) = s(\pi)T \quad \forall \pi \in S_i\}$
↑znak permacije

$$= \Big\{ \sum_{\pi \in S_i} \tfrac{1}{i!} s(\pi)\overline{\pi}(T) \mid T \in T_iV \Big\}$$

$\Lambda^i V$ je i-ta zunanja potenca prostora V. Elementi $\Lambda^i V$ se imenujejo antisemetrični tenzorji.

<u>Primer:</u> • $\Lambda^2 V = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u_i \otimes v_i - v_i \otimes u_i) \mid \alpha_i \in \Bbbk,\ u_i, v_i \in V \Big\}$.

• $\Lambda^3 V = \operatorname{Lin}\Big\{ \begin{matrix} u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v - v \otimes u \otimes w + \\ + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u + w \otimes u \otimes v \end{matrix} \;\Big|\; u, v, w \in V \Big\}$.

Če je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V, je $\{e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \mid 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_i \le n\}$ baza za $\Lambda^i V$.

Posebni primer: Baza za $\Lambda^n V$ je $\{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n\}$.
Če je $i > n$, potem je $\Lambda^i V = \{0\}$.

$$\Rightarrow \dim \Lambda^i V = \begin{cases} \binom{\dim V}{i}; & 0 \leq i \leq \dim V \\ 0; & i > \dim V \end{cases}$$

<u>Trditev</u>: Naj bo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V, $1 \leq \ell \leq n$, $\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_\ell} \mid j_1 < \cdots < j_\ell\}$ baza za $\Lambda^\ell V$. Naj bodo $v_1, \ldots, v_\ell \in V$ poljubni vektorji. Razvijemo jih po bazi: $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ za $i = 1, \ldots, \ell$. Koeficient pri $j_1 \wedge \cdots \wedge j_\ell$ v razvoju tenzorja $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \in \Lambda^\ell V$ po bazi je enak minorju matrike $A = [a_{ij}]$ reda ℓ, ki ga dobčajo stolpci z indeksi $j_1, \ldots, j_\ell$.

V posebnem, $\ell = n$, dobimo determinanto: edini n-linearni antisimetrični funkcional $\leftrightarrow$ dimenzija je 1 pri $n = \ell$.

12. december 2025

<u>Dokaz</u>:
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell = \sum_{j_1, \ldots, j_\ell = 1}^n a_{1,j_1} \cdots a_{\ell, j_\ell} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_\ell}$$

$$\overset{\text{antisimetričnost}}{=} \sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_\ell \leq n} \underbrace{\sum_{\pi \in S_\ell} s(\pi) a_{1, j_{\pi(1)}} \cdots a_{\ell, j_{\pi(\ell)}}} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_\ell}$$

Koeficient $\sum_{\pi \in S_\ell} s(\pi) a_{1, j_{\pi(1)}} \cdots a_{\ell, j_{\pi(\ell)}}$ je natanko determinanta matrike

$$\begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell, j_1} & \cdots & a_{\ell, j_\ell} \end{bmatrix}$$

<u>Primer</u>: $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \in \mathbb{k}^3$

$\Rightarrow v \wedge w = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_1 \wedge e_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3$.

Vidimo, da so koeficienti ravno 2×2 minorji matrike $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

<u>Posledica</u>: $v_1, \ldots, v_\ell \in V$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow \underbrace{v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell}_{\in \Lambda^\ell V} \neq 0$

Dokaz: $v_1 \cdots v_\ell$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow$ rang matrike A je ℓ $\Leftrightarrow$ nek minor matrike A reda ℓ je neničeln $\Leftrightarrow$ $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \neq 0$. ▨

trditev: ti minorji so koeficienti pri razvoju $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$ po bazi

Posledica: Naj bodo $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{k}^n$ linearno neodvisni in $w_1, \dots, w_\ell \in \mathbb{k}^n$ linearno neodvisni. Potem sta $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$ in $w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell$ linearno odvisni v $\Lambda^\ell V \Leftrightarrow \mathcal{L}in\{v_1, \dots, v_\ell\} = \mathcal{L}in\{w_1, \dots, w_\ell\}$.

Dokaz: ($\Leftarrow$): Recimo, da je $\mathcal{L}in\{v_1, \dots, v_\ell\} = \mathcal{L}in\{w_1, \dots, w_\ell\}$. Potem obstajajo $a_{i,j} \in \mathbb{k}$, da je $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \ \forall i$.

$$\Rightarrow w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell = \sum_{j_1, \dots, j_\ell} a_{1,j_1} \cdots a_{\ell j_\ell} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_\ell}$$

$$= \Big(\sum_{j_1, \dots, j_\ell} \sum_{\pi \in S_\ell} s(\pi) a \cdots \Big) v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$$

$$= c \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell, \qquad c \in \mathbb{k}$$

($\Rightarrow$): $v_1, \dots, v_\ell$ linearno neodvisni, $w_1, \dots, w_\ell$ linearno neodvisni

$\Rightarrow v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \neq 0$, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell \neq 0$ in po predpostavki $w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$ za neki $\lambda \in \mathbb{k}$

Naj bo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ poljuben.

v_i se ponovi

$$v_i \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell = \lambda v_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell = 0$$

$\Rightarrow v_i, w_1, \dots, w_\ell$ so zato po posledici linearno odvisno

$\Rightarrow v_i \in \mathcal{L}in\{w_1, \dots, w_\ell\} \ \forall i \ \Rightarrow \mathcal{L}in\{v_1, \dots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{L}in\{w_1, \dots, w_\ell\}$.

Po simetriji velja tudi obratna inkluzija. ▨

Definicija: Naj bosta $\ell, n \in \mathbb{N}$; $\ell \leq n$. Označimo $N = \binom{n}{\ell} = \dim \Lambda^\ell \mathbb{k}^n$. Definiramo preslikavo $f: Gr(\ell, n) \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ na naslednji način: vektorskemu prostoru $V \in Gr(\ell, n)$ izberemo bazo $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ in definiramo $f(V) = [v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell] \in \mathbb{P}(\Lambda^\ell \mathbb{k}^n) = \mathbb{P}^{N-1}$. Ker so $v_1, \dots, v_\ell$ linearno neodvisni, je $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell \neq 0$, zato lahko definiramo $[v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell] \in \mathbb{P}^{N-1}$. Po zadnji posledici je $[v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell]$ odvisen le od V, ne pa tudi od izbrane baze. Preslikava f je torej dobro definirana. Po zadnji posledici je tudi injektivna (ena smer dobra definiranost, druga smer injektivnost). Preslikavi φ rečemo Plückerjeva vložitev. Homogene koordinate točke $\varphi(V)$ se imenujejo Plückerjeve koordinate V-ja.

Plückerjeve koordinate so torej minorji ustrezne matrike. V algebraični geometriji $Gr(\ell,n)$ identificiramo s $\varphi(Gr(\ell,n))$ tj. s sliko Plückerjeve vložitve. $\varphi(Gr(\ell,n)) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. Treba je še dokazati, da je ta slika zaprta v topologiji Zariskega. Sliko $\varphi(Gr(\ell,n))$ sestavljajo vsi tenzorji oblike $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$, kjer so $v_1, \dots, v_\ell$ linearno neodvisni (splošni elementi $\mathbb{P}^{n-1}$ pa so linearne kombinacije takšnih tenzorjev). Takim tenzorjem pravimo čisti ali nerazcepni tenzorji. Treba je pokazati, da je množica čistih tenzorjev zaprta v $\mathbb{P}^{n-1}$. Za $\ell = n$ je to očitno, saj so vsi tenzorji čisti v $\Lambda^n \mathbb{k}^n$ ($\dim = 1$). Predpostavimo torej $\ell < n$.

Lema: Naj bo $\ell < n$. Fiksirajmo neničelen element $w \in \Lambda^\ell \mathbb{k}^n$. Definirajmo linearno preslikavo

$$F : \mathbb{k}^n \longrightarrow \Lambda^{\ell+1} \mathbb{k}^n, \quad x \longmapsto w \wedge x$$

Potem je $\operatorname{rang} F \geq n - \ell$, pri čemer velja enakost $\Leftrightarrow w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$ za neke linearno neodvisne $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{k}^n$.

Dokaz: Naj bo $r = n - \operatorname{rang} F = \dim \ker F$ in $\{v_1, \dots, v_r\}$ baza za $\ker F$. To bazo dopolnimo do baze $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$ za $\mathbb{k}^n$. Potem vemo, da je $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_\ell} \mid i_1 < \cdots < i_\ell\}$ baza za $\Lambda^\ell \mathbb{k}^n$.
w razvijemo po bazi:

$$w = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} a_{i_1, \dots, i_\ell} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_\ell}$$

16. december 2025

Če je $j \in \{1, \dots, r\}$, potem je $v_j \in \ker F$.

$$\Rightarrow 0 = F(v_j) = w \wedge v_j = a_{i_1, \dots, i_\ell} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_\ell} \wedge v_j \qquad (*)$$

Če je $j \in \{i_1, \dots, i_\ell\}$, potem je $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell} \wedge v_j = 0$, ker se en vektor ponovi. Tenzorji oblike $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell} \wedge v_j$, kjer $j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$, pa so linearno neodvisni, saj pripadajo bazi za $\Lambda^{\ell+1} k^n$.
Iz (*) zato sledi, da je $a_{i_1, \dots, i_\ell} = 0$, če je $j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$. To velja za vsak $j \in \{1, \dots, r\}$, torej je lahko $a_{i_1, \dots, i_\ell} \neq 0$ kvečjemu v primeru, ko je $\{1, \dots, r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_\ell\}$.
$w \neq 0 \Rightarrow$ vsaj en koeficient je neničeln $\Rightarrow \{1, \dots, r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_\ell\}$ za vsaj eno zaporedje indeksov $i_1 < \dots < i_\ell$.
$\Rightarrow r = \dim \ker F \leq \ell \Rightarrow \operatorname{rang} F \geq n - \ell$
Recimo, da velja $\operatorname{rang} F = n - \ell$. $\Rightarrow r = \ell$
Vsebovanost $\{1, \dots, r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_\ell\}$ je potem možna le v primeru, ko je $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_\ell = i_r = r \Rightarrow$ Vsi koeficienti, razen $a_{1, \dots, \ell}$ so 0.
$\Rightarrow w = a_{1, \dots, \ell} v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell$.
Obratno, recimo, da je $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_\ell$ za neke linearno neodvisne $w_1, \dots, w_\ell$. Za vsak $j = 1, \dots, \ell$ je $w \wedge w_j = 0 \Rightarrow F(w_j) = 0$
$\Rightarrow \dim \ker F \geq \ell \Rightarrow \operatorname{rang} F \leq n - \ell$.
Vemo, da vedno velja obratna neenakost $\Rightarrow \operatorname{rang} F = n - \ell$. ▨

Izrek: Slika Plückerjeve vložitve je zaprta v $\mathbb{P}^{N-1}$, torej je projektivna raznoterost.

Dokaz: Če je $\ell = n$, potem je $Gr(n, n)$ točka in izrek velja. Zato predpostavimo $\ell < n$. Za $w \in \mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}(\Lambda^\ell k^n)$ velja:
$w \in \phi(Gr(\ell, n)) \Leftrightarrow w = [v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell]$ za neke linearno neodvisne $v_1, \dots, v_\ell \in k^n \Leftrightarrow \operatorname{rang} F = n - \ell$, kjer je F preslikava iz prejšnje leme. Po lemi vemo tudi, da je $\operatorname{rang} F$ vedno $\geq n - \ell$. Torej je $w \in \phi(Gr(\ell, n)) \Leftrightarrow$ vsi minorji reda $n - \ell + 1$ matrike, ki pripada preslikavi F, so ničelni. $F : x \longmapsto w \wedge x$.
Členi matrike, ki pripada F, so homogeni polinomi v homogenih koordinatah w. $\Rightarrow$ Minorji so tudi homogeni polinomi v homogenih

koordinatah w. Pogoj $w \in \phi(Gr(\ell,n))$ smo napisali s homogenimi polinomskimi enačbami, zato je $\phi(Gr(\ell,n))$ projektivna raznoterost v $\mathbb{P}^{N-1}$. ▨

$Gr(\ell,n)$ bomo identificirali s sliko Plückerjeve vložitve in jo obravnavali kot projektivno raznoterost v $\mathbb{P}(\Lambda^\ell \mathbb{k}^n)$.

Primer: $Gr(2,4)$, $F: \mathbb{k}^4 \longrightarrow \Lambda^3 \mathbb{k}^4$, $\dim \Lambda^3 \mathbb{k}^4 = \binom{4}{3} = 4$
$\Rightarrow$ F zapišemo s 4×4 matriko $\Rightarrow$ $Gr(2,4)$ je potem neničelna množica vseh 3×3 minorjev dobljene matrike. Teh je $4\cdot 4 = 16$.
Na ta način $Gr(2,4) \subseteq \mathbb{P}^{\binom{4}{2}-1} = \mathbb{P}^5$ opišemo s 16 enačbami.
Da pa se $Gr(2,4)$ opisati samo z eno kvadratno enačbo:

$$x_{1,2}\cdot x_{3,4} - x_{1,3}\cdot x_{2,4} + x_{1,4}\cdot x_{2,3} = 0,$$

kjer so $x_{i,j}$ Plückerjeve koordinate na $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{k}^4)$.

Drug način opisa Grassmannove raznoterosti (kot pokritje z množicami izomorfnimi afinim prostorom):
Naj bo $V \in G(\ell,n)$ in $\{v_1,\dots,v_\ell\}$ baza za V. Potem V lahko predstavimo z matriko $[v_1\ v_2\ \cdots\ v_\ell]$. Ta matrika je velikosti $n\times\ell$ in ranga ℓ, ker so $v_1,\dots,v_\ell$ linearno neodvisni.
Obratno, matriki $A \in \mathbb{k}^{n\times\ell}$ ranga ℓ, lahko priredimo linearno ogrinjačo stolpcev, ki je element $Gr(\ell,n)$.
Imejmo matriki $A,B \in \mathbb{k}^{n\times\ell}$ ranga ℓ. Potem matriki A,B določata isti element $Gr(\ell,n)$ $\Leftrightarrow$ linearna ogrinjača A = linearna ogrinjača stolpcev od B $\Leftrightarrow$ $\exists$ obrnljiva matrika P, da je $B = A\cdot P$.
$\Rightarrow$ $Gr(\ell,n)$ si lahko predstavljamo kot množico $n\times\ell$ matrik ranga ℓ modulo elementarne operacije na stolpcih.
Naj bo $\{e_1,\dots,e_n\}$ standardna baza za $\mathbb{k}^n$ in naj bo $U_0 \subseteq Gr(\ell,n) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^\ell \mathbb{k}^n)$ odprta podmnožica Grassmannove

raznoterosti, kjer je koeficient pri $e_1 \wedge \cdots \wedge e_\ell$ neničeln.

Naj bo $V \in Gr(\ell, n)$, $V = \mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_\ell\}$ in $[v_1\ v_2 \cdots v_\ell] = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \ell \\ n-\ell \end{array} \\ \ell & \end{array}$

$V \in Gr(\ell, n) \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$ razpišemo po bazi $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell} \mid i_1 < \cdots < i_\ell\}$.

Koeficient pri $e_1 \wedge \cdots \wedge e_\ell$ je natanko $\det A$. Torej je $V \in U_0 \iff$ A je obrnljiva matrika.

V primeru, ko je A obrnljiva matrika, matriko $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ pomnožimo z desne z A^{-1} in dobimo matriko $\begin{bmatrix} I \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$, ki določa isti prostor V. Ta matrika je enolično določena z V in pogojem, da je zgornji $\ell \times \ell$ blok identiteta. $\Rightarrow U_0$ je v bijekciji z matrikami oblike $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$, kjer je $C \in \mathbb{k}^{(n-\ell)\times\ell}$.

Definiramo preslikavo $\varphi : \mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell} \longrightarrow U_0 \subseteq Gr(\ell, n) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^\ell \mathbb{k}^n)$ na naslednji način: Za $C \in \mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$ pišimo $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} = [c_1 \cdots c_\ell]$ in definiramo $\varphi(C) = [c_1 \wedge \cdots \wedge c_\ell] \in U_0$. Vemo že, da je φ bijekcija.

Dokažimo, da je regularna preslikava z regularnim inverzom.

Koeficienti $c_1 \wedge \cdots \wedge c_\ell$ pri razvoju po standardni bazi prostora $\Lambda^\ell \mathbb{k}^n$ so minorji matrike $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$, ki so očitno polinomi v C.

$\Rightarrow \varphi$ je regularna preslikava

φ^{-1}: Naj bo $V \in U_0$ prostor, ki ga predstavimo kot $c_1 \wedge \cdots \wedge c_\ell$, pri čemer naj bo koeficient pri $e_1 \wedge \cdots \wedge e_\ell$ enak 1 in naj bo $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$ matrika, ki pripada V. $\varphi^{-1}(V) = C$. Členi matrike C so (do predznaka natančno) ravno enaki minorjem reda ℓ matrike $\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$, kjer izmed prvih ℓ vrstic vzamemo $\ell-1$ vrstic.

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ je regularna preslikava $\Rightarrow U_0$ je izomorfna $\mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$.

Na enak način pokažemo, da je za vsako zaporedje $i_1 < \cdots < i_\ell$ odprta množica v $Gr(\ell, n)$, kjer je koeficient pred $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}$ neničeln, izomorfna $\mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$.

$Gr(\ell, n)$ smo torej pokrili z odprtimi podmnožicami, ki so vse izomorfne $\mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$.

Lema: Naj bo X kvaziprojektivna raznoterost in $\{U_1,\dots,U_m\}$ odprto pokritje za X, tako da je $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ za vsaka i in j. Če so vse U_i nerazcepne, potem je X nerazcepna.

Dokaz: Recimo, da je X razcepna. Pišimo $X=X_1\cup X_2\cup Z$, kjer sta X_1 in X_2 dve nerazcepni komponenti in Z unija vseh ostalih nerazcepnih komponent (lahko je $Z=\emptyset$). Za vsak i je $U_i=(U_i\cap X_1)\cup(U_i\cap X_2)\cup(U_i\cap Z)$. U_i nerazcepna $\Rightarrow U_i\subseteq X_1$, $U_i\subseteq X_2$ ali $U_i\subseteq Z$. $\{U_1,\dots,U_m\}$ je pokritje, zato obstajata i in j, da je $U_i\subseteq X_1$, $U_j\subseteq X_2$. $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, odprta v X_1 in v X_2 $\Rightarrow \overline{U_i\cap U_j}=X_1=X_2$. Pokritje $\to X$ nerazcepna. $\blacksquare$

Posledica: $Gr(\ell,n)$ je nerazcepna.

Dokaz: Definirali smo odprto pokritje $\{U_1,\dots,U_m\}$, kjer je U_m množica tistih elementov, ki imajo neničelni koeficient pri $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_\ell}$ za neke $i_1<\cdots<i_\ell$. Preveriti se da, da je $U_i\cap U_j\neq 0$ za vsaka i,j. Vsak U_j je izomorfen afinemu prostoru $\mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$, torej je nerazcepen. Po lemi sledi, da je $Gr(\ell,n)$ nerazcepna. $\blacksquare$

Trditev: $Gr(\ell,n)\cong Gr(n-\ell,\ell)$.

Dokaz: Definiramo preslikavo
$$\tau: Gr(\ell,n)\longrightarrow Gr(n-\ell,n)$$
$$V\longmapsto V^\perp=\{x\in\mathbb{k}^n \mid \forall y\in V.\ \sum_{i=1}^n x_i y_i=0\}.$$
τ je očitno bijektivna. Dokazati moramo, da je regularna (in zaradi simetrije bo potem tudi τ^{-1} regularna). Regularnost je dovolj preverjati na množicah iz pokritja. Zaradi simetrije je to dovolj narediti na eni izmed njih, npr. U_0.
Naj bo $V\in U_0$. Potem V enolično predstavimo z matriko $\begin{bmatrix} I \\ C\end{bmatrix}$ (ℓ, $n-\ell$), kjer je $C\in\mathbb{A}^{(n-\ell)\times\ell}$. Velja

$$\begin{bmatrix} -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} = 0$$

$V^\perp$ je enolično določen z V $\Rightarrow$ prostoru $V^\perp$ pripada matrika $\begin{bmatrix} -C^T \\ I \end{bmatrix}$: koeficient pri $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-\ell}}$ pri razvoju $V^\perp$ po standardni bazi prostora $\Lambda^{n-\ell} \mathbb{K}^n$ je enak ustreznemu minorju matrike $\begin{bmatrix} -C^T \\ I \end{bmatrix}$ reda $n-\ell$. Ti minorji so polinomi v členih matrike C $\Rightarrow$ $\uparrow$ je regularna preslikava. ∎