6. Mere na lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih
(Radonove mere in Rieszov reprezentacijski izrek)

<u>Motivacija:</u> $C_c(X)$, φ pozitiven funkcional na $C_c(X)$

$\varphi \geq 0 :\Leftrightarrow \varphi(f) \geq 0$ za $\forall f \in C_c(X)$ nenegativen

<u>Rieszov izrek:</u> $\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \exists \mu$ pozitivna izredno lepa mera, da je

$$\varphi(f) = \int_X f \, d\mu.$$

6.1. Pojmi in orodja

X bo vedno lokalno kompakten Hausdorffov prostor (T_2)

$f \in C_c(X) \ldots f$ zvezna in $\operatorname{supp} f$ kompakten

$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$

$K^{\text{komp.}} \subseteq X$ in $K \subseteq U^{\text{odp}} \subseteq X$, za $f \in C_c(X)$ pišemo

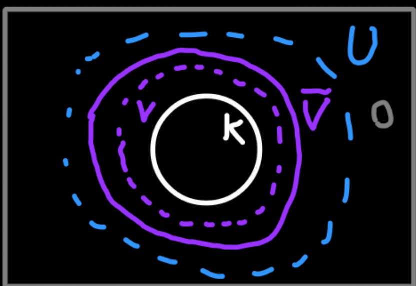
$$K \precsim f \precsim U,$$

če $f : X \longrightarrow [0,1]$, $f|_K \equiv 1$ in $\operatorname{supp} f \subseteq U$.

(K je podrejena f in f je podrejena U)

13. januar 2026

<u>Izrek:</u> Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor, $K \subseteq X$ kompaktna, $K \subseteq U^{\text{odp}}$. Tedaj se da vsako zvezno funkcijo $f : K \longrightarrow [0,1]$ razširiti v $F \in C_c(X)$, da je $\operatorname{supp} F \subseteq U$ in $F : X \longrightarrow [0,1]$



<u>Dokaz:</u> Po izreku iz splošne topologije, zaradi lokalne kompaktnosti in Hausdorffovosti $\exists V^{\text{odp}}$, $\overline{V}$ kompaktna $\Rightarrow K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Oglejmo si $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U \subseteq X^+$ ← kompaktifikacija X z eno točko

Definirajmo $\tilde{f}: K \cup (X^+ \setminus V) \longrightarrow [0,1]$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in K \\ 0; & x \in X^+ \setminus V \end{cases}$$

Ker je $K \cup (X^+ \setminus V)$ zaprta v X^+, uporabimo Tietzejev izrek za normalne prostore in dobimo razširitev $\tilde{F}: X^+ \longrightarrow [0,1]$ funkcije $\tilde{f}$.

$\Rightarrow F := \tilde{F}|_X$, F je zvezna, $F: X \longrightarrow [0,1]$, $F|_K \equiv f$

in $\operatorname{supp} F \subseteq \underbrace{\bar{V}}_{\text{kompakt}} \subseteq U$ ▨

<u>Lema [Urison]</u>: Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov in $K \subseteq U$, K kompaktna, U odprta. Tedaj $\exists f \in C_c(X)$, da je $K \prec f \prec U$. ($f: X \to [0,1] \in C_c(X)$; $f|_K = 1$ in $\operatorname{supp} f \subseteq U$)

Brez dokaza.

6.2 Pozitivni linearni funkcionali na $C_c(X)$

<u>Definicija</u>: Linearni funkcional $\varphi \in C_c(X)$ je **pozitiven**, če velja: $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

<u>Lema</u>: φ pozitiven $\Leftrightarrow (f \geq g \Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(g))$

<u>Dokaz</u>: $(\Rightarrow)$: $f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0$, $\varphi(f-g) = \varphi(f) - \varphi(g) \geq 0$

$\Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(g)$

$(\Leftarrow)$: $g = 0$: $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(0) = 0$ ▨

<u>Izrek</u>: Naj bo K kompakten Hausdorffov prostor in $\varphi: \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ pozitiven funkcional. Tedaj je f omejen (zvezen).

Primer: c_{00}... vsa zaporedja, ki so od nekod naprej konstantno enaka 0

$$c_{00} = \{ (x_n)_n \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ x_n = 0 \ \forall n \geq k \}$$
$$\varphi : c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi((x_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n$$
$$\varphi(e_n) = n \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \text{ ni omejen}$$

Primer: Naj bo X Hausdorffov prostor in μ Borelova mera na X, ki je končna na vseh kompaktnih podmnožicah v X.
$$\varphi : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \varphi(f) := \int_X f \, d\mu = \int_{\operatorname{supp} f} f \, d\mu.$$

Ker je $f \in L^1(\mu)$ je $\varphi(f)$ dobro definiran linearni funkcional na $C_c(X)$.
$$f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0 \Rightarrow \varphi \text{ je tudi pozitiven}$$

Definicija: Pozitivna Borelova mera μ je zunanje regularna, če $\forall A \in X$ Borelova velja
$$\mu(A) = \inf \{ \mu(U) \mid A \subseteq U^{\text{odp}} \}.$$
Pozitivna Borelova mera μ je notranje regularna za množico A, če je $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \}$.
Borelova mera μ je notranje regularna, če je notranje regularna pri vseh Borelovih množicah.
Regularnost = notranja + zunanja regularnost za Borelove množice

Definicija: Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor in μ Borelova mera. Mera μ je radonova mera, če izpolnjuje naslednje pogoje:
(i) μ je zunanje regularna
(ii) μ je notranje regularna pri vseh odprtih množicah
(iii) $\mu(K) < \infty \quad \forall K$ kompakt.

Izrek [Rieszov reprezentacijski izrek, izrek Riesz - Markova]:
Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Tedaj za vsak pozitiven funkcional φ na $C_c(X)$ obstaja natanko ena Radonova mera μ, da je $\varphi(f) = \int_X f \, d\mu$.
Dodatno velja $\mu(U) = \sup\{\varphi(f) \mid f \prec U\} \; \forall U^{odp}$ in
$\mu(K) = \inf\{\varphi(f) \mid K \prec f\} \; \forall K^{komp}$.
$(f : X \to [0,1], \; f \in C_c(X), \dots)$.

Opomba: „Ne pošten" način kako dobiti Lebesgueovo mero:
$f \in C_c(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \Rightarrow \varphi$ je pozitiven linearen funcional na $C_c(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Po Rieszovem izreku $\exists!$ Radonova mera m, da je
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dm.$$

Mero m imenujemo Lebesgueova mera.
Domača naloga: Izpelji lastnosti mere m.

Lema: Radonova mera je enolično določena z vrednostmi na kompaktnih množicah.

Dokaz: Naj bo E Borelova $\Rightarrow \mu(E) = \inf(\mu(U) \mid E^{odp} \subseteq U)$
po zunanji regularnosti
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K^{komp} \subseteq U\}$$
▨

Lema: Naj bo μ Radonova mera na lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X. Naj bo $\varphi : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitiven funkcional, porojen z mero μ. Tedaj velja
$$\mu(U) = \sup\{\varphi(f) \mid f \prec U\} \quad \forall U^{odp} \subseteq X. \qquad (*)$$

Dokaz: Naj bo s supremum iz leme in $f \prec U$. Tedaj

$$f \le \chi_U \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X \chi_U\,d\mu = \mu(U).$$

$\Rightarrow s \le \mu(U)$

$\mu(U) \le s$: Naj bo $K^{komp} \subseteq U \Rightarrow \exists f.\ K \prec f \prec U$

$$\Rightarrow \chi_K \le f \le \chi_U$$

$\Rightarrow \int$ in dobimo $\mu(K) \le \int_X f\,d\mu \le \mu(U)$.

Ker je μ Radonova, je $\sup\{\mu(K) \mid K^{komp} \subseteq U\} = \mu(U)$.

Ker je $\mu(K) = \int_X f\,d\mu \le \mu(U) \Rightarrow \mu(U) \le s$. $\boxed{}$

Lema: Naj bo φ pozitiven funkcional na $C_c(X)$ in μ zunanje regularna Borelova mera, ki zadošča (*). Tedaj velja

$$\mu(K) = \inf\{\varphi(f) \mid K \prec f\} \quad \forall K^{komp}.$$

V posebnem primeru je $\mu(K) < \infty \quad \forall K^{komp} \subseteq X$.

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$, $K^{komp} \subseteq X$ in $f \in C_c(X)$, da je $K \prec f$.

$U = \{x \in X \mid f(x) > 1-\varepsilon\}$ je odprta in $K \subseteq U$

$\rightsquigarrow g \prec U \Rightarrow g \le \frac{f}{1-\varepsilon}$ ($g = 0$ izven U na U pa < 1, f pa $\geq 1-\varepsilon$)

$\Rightarrow \varphi(g) \le \frac{1}{1-\varepsilon}\varphi(f)$. Zaradi (*) sledi $\underset{\mu(K)}{\overset{\mu(U)}{\rotatebox{90}{$\le$}}} \le \frac{1}{1-\varepsilon}\varphi(f)$

$\Rightarrow \varepsilon \searrow 0 \Rightarrow \mu(K) \le \varphi(f) \quad \forall f;\ K \prec f$

Torej je $\mu(K) \le \inf\{\varphi(f) \mid K \prec f\}$

To tudi pokaže, da je mera $\mu(K) < \infty$.

Dokažimo še obratno neenakost.

Naj bo $\varepsilon > 0$ in poiščimo odprto množico $U \supseteq K$, da velja $\mu(K) \ge \mu(U) - \varepsilon$. Po izreku obstaja $f \in C_c(X)$, da je $K \prec f \prec U$.

Tedaj velja $\mu(K) \ge \mu(U) - \varepsilon \ge \varphi(f) - \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Velja tudi obratna neenakost $\boxed{}$

Skica dokaza [Riesz–Markov]:

- Recimo, da imamo dve Radonovi meri, ki zadoščata izreku.

$\Rightarrow \forall K^{komp}: \mu_1(K) = \inf\{\varphi(f) \mid K \prec f\} = \mu_2(K)$

Radonova mera je enolično določena s vrednostmi na kompaktnih množicah, zato je $\mu_1 = \mu_2$.

- Mero μ definiramo na naslednji način:

$$U^{odp} \subseteq X.\ \mu(U) := \sup\{\varphi(f) \mid f \prec U\}.$$

Če je $Y \subseteq X$ poljubna: $\mu^* := \inf\{\mu(U) \mid U^{odp} \supseteq Y\}$. (**)

Če $U^{odp} \Rightarrow \mu(U) = \mu^*(U)$.

Da se dokazati, da je μ^* zunanja mera, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ pa vsebuje vse odprte množice in zato vse Borelove množice.

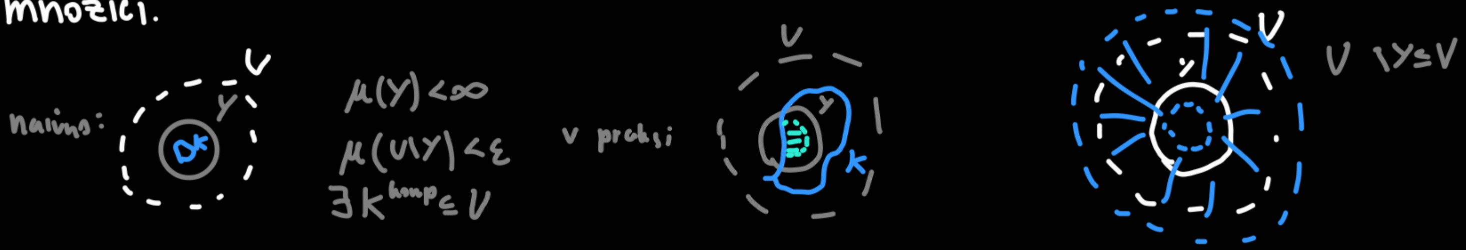
Iz pogoja (**) dobimo zunanjo regularnost.

- Ostane "samo" še notranja regularnost pri odprtih množicah, $\mu(K) < \infty$ $\forall K$ kompaktno in $\int_X f\,d\mu = \varphi(f)$ $\forall f \in C_c(X)$. ▨

6.3 Regularnost Radonovih mer

14. januar 2026

Trditev: Radonova mera je notranje regularna pri vsaki σ-končni množici.



Dokaz: Najprej primer $\mu(Y) < \infty$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je μ Radonova, $\exists U^{odp} \supseteq Y$, da je $\mu(U \setminus Y) < \varepsilon$. Ker je μ pri U notranje regularna, $\exists K^{komp} \subseteq U$, da je $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Ker velja $\mu(U \setminus Y) < \varepsilon$, $\exists V^{odp} \supseteq U \setminus Y$, da je $\mu(V) < \varepsilon$.

Definiramo $H := K \setminus V$. H je kompaktna, saj je $H = K \cap V^c$ zaprta v K.

Velja
$$\mu(H) = \mu(K \setminus V) = \mu(K) - \mu(K \cap V) > \mu(U) - \varepsilon - \mu(K \cap V)$$
$$\geq \mu(U) - \varepsilon - \mu(V) \geq \mu(U) - 2\varepsilon \geq \mu(Y) - 2\varepsilon.$$

Če je $\mu(Y) = \infty$, potem obstaja takšno zaporedje $(Y_n)_n$ množic s končno mero, da je $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ in $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Po pravkar dokazanem, za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo kompaktno množico $K_n \subseteq Y_n$, da je $\underset{\downarrow \infty}{\mu(K_n)} \geq \mu(Y_n) - \frac{1}{n}$

$K_n \subseteq Y_n \subseteq Y$ $\qquad\qquad \mu(Y)$ saj $\mu(Y) = \lim_{n\to\infty} \mu(Y_n)$ ▨

Opomba: Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$ je Radonova.
Lebesgueova mera je zunanje in notranje regularna in še $\mu(K) < \infty \quad \forall K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}$.

Posledica: Naj bo μ Radonova mera na X.
i) Če je μ σ-končna, potem je notranje regularna.
ii) Če je X σ-kompakten, potem je μ notranje regularna.

Dokaz: i) Vsaka Borelova množica je σ-končna $\Rightarrow$ μ je notranje regularna pri vsaki Borelovi množici
ii) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kompakti, μ Radonova $\Rightarrow \mu(K_n) < \infty$. Uporabimo i) ▨

6.4 Aproksimacija z zveznimi funkcijami

Trditev: Naj bo μ Radonova mera na X. Tedaj je $C_c(X)$ gost v $L^p(\mu)$ za vsak $1 \leq p < \infty$.

Dokaz: Vemo že, da je množica stopničastih funkcij iz $L^p(\mu)$ gosta v $L^p(\mu)$. Zato je dovolj dokazati, da se da vsako stopničasto funkcijo aproksimirati s funkcijami iz $C_c(X)$.
$s = \sum_{k=1} \alpha_k \chi_{E_k}$ $\Rightarrow$ zadošča dokazati, da se da vsak χ_E, kjer je $\mu(E) < \infty$, aproksimirati s $C_c(X)$ funkcijami.
$\forall \varepsilon > 0 .\ \exists K^{\text{komp}}, U^{\text{odp}} .\ K \subseteq E \subseteq U$ in $\mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$.
Naj bo $f \in C_c(X)$ poljubna, da velja $K \prec f \prec U$.
$\|\chi_E - f\|_p^p = \int_{V\setminus K} |\chi_E - f|^p \, d\mu \leq \int_{V\setminus K} 1 \, d\mu = \mu(V \setminus K) < \varepsilon^p$
$\Rightarrow \|\chi_E - f\|_p < \varepsilon$ ▨

Opomba: X lokalno kompaktnen Hausdorffov.

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \text{ je gosta}$$

Napolnitev od $C_c(X)$ je $C_0(X)$.

omejene zvezne preslikave

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subset L^\infty(\mu)$$

Ni veliko upanja, da je $C_c(X)$ gost v $L^\infty(\mu)$.

Posledica: $C_c(\mathbb{R})$ je gost v $L^p(m)$, kjer je $1 \leq p < \infty$ in m Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$.
(Mišljena je gostota gleda na p-to normo.)

Da se dokazati, da je $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tudi gost v $L^p(m)$ $\forall 1 \leq p < \infty$.

Izrek [Luzin]: Naj bo μ Radonova mera na X in $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ merljiva in neničelna na množici s končno mero. Tedaj $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(X)$, da je $\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$ in $\sup_{x \in X} |g(x)| < \sup_{x \in X} |f(x)|$.
Brez dokaza.