

4. KOMPLEKSNE MERE

4.1. Totalna variacija mere

3. december 2025

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Preslikava $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ je **kompleksna mera**, če je števno aditivna za zaporedja paroma disjunktih množic iz $\mathcal{A}$:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$; $A_n \cap A_m = \emptyset$ za $n \neq m$, potem

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

$$A_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) \Rightarrow \lambda(\emptyset) = 0$$

Opazka: $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$$

za vsako bijekcijo $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Iz analize 1 sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$ konvergira absolutno.

Primer: Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$. Za $f \in L^1(\mu)$ definiramo:

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu; \quad A \in \mathcal{A}.$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ paroma disjunktne, potem

$$\lambda\left(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_A\right) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} d\mu \stackrel{\text{LDK za vrste (DN)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu$$

$\Rightarrow \lambda$ je kompleksna mera.

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = 0$$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$$

Zapišemo $\lambda \ll \mu$ (absolutna zveznost λ glede na μ).

Trditev: Preslikava $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksna mera natanko takrat, ko velja vsaj ena od naslednjih trditev:

i) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ za vsako naraščajoče zaporedje množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v $\mathcal{A}$.

ii) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ za vsako padajoče zaporedje množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v $\mathcal{A}$.

Dokaz: Enako kot v primeru pozitivne mere. Za (ii) upoštevamo $\lambda(A_n) \in \mathbb{C}$. ▣

Naj bo $A \in \mathcal{A}$. Zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktih množic iz $\mathcal{A}$ imenujemo **(merljiva) particija** za A , če je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Totalna variacija mere λ je $|\lambda|$, definirana s predpisom $|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ particija za } A \right\}$.

Izkaže se, da velja naslednje: $f \in L^1(\mu)$; μ pozitivna mera, $\lambda(A) = \int_A f d\mu \Rightarrow |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu$.

$A \in \mathcal{A}$; $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$
 $\Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = |\lambda(A)|$.

$|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$

Definiramo: $(\operatorname{Re} \lambda)(A) := \operatorname{Re} \lambda(A)$, $(\operatorname{Im} \lambda)(A) := \operatorname{Im} \lambda(A)$.

Ker je λ kompleksna mera, sta $\operatorname{Re} \lambda$ in $\operatorname{Im} \lambda$ realni meri.

Vedno velja: $|\lambda| \leq |\operatorname{Re} \lambda| + |\operatorname{Im} \lambda|$.

$\forall A \in \mathcal{A}$: $|\lambda|(A) \leq |\operatorname{Re} \lambda|(A) + |\operatorname{Im} \lambda|(A)$

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za A . Tedaj velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(\operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda)(A_n)|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} \lambda(A_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} \lambda(A_n)|$$

$$\leq |\operatorname{Re} \lambda|(A) + |\operatorname{Im} \lambda|(A)$$

Naredimo supremum po vseh particijah $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$|\lambda|(A) \leq |\operatorname{Re} \lambda|(A) + |\operatorname{Im} \lambda|(A)$$

Velja tudi: $|\operatorname{Re} \lambda|, |\operatorname{Im} \lambda| \leq |\lambda|$.

Izrek: Za vsako kompleksno mero λ je $|\lambda|$ končna pozitivna mera.

9. december 2025

Dokaz: Dokaz v dveh korakih:

1. $|\lambda|$ je pozitivna mera.

$$|\lambda|(\emptyset) = 0 \quad \checkmark$$

$A \in \mathcal{A}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne v $\mathcal{A}$, da je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda|(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

($\geq$) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $a_n \geq 0$, da je $a_n \leq |\lambda|(A_n)$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja particija $(A_{nj})_{j \in \mathbb{N}}$ za A_n , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(A_{nj}) \geq a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Tedaj je $(A_{nj})_{n,j \in \mathbb{N}}$ particija za A , zato velja

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{n,j}| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \varepsilon.$$

Pošljemo $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^k a_n$

Za $n=1, 2, \dots, k$ pošljemo $a_n \rightarrow |\lambda|(A_n) \Rightarrow$

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n).$$

($\leq$): Naj bo $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ particija za $A \Rightarrow (B_j \cap A_n)_{j \in \mathbb{N}}$ je particija za A_n .

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_j \cap A_n) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

Po definiciji totalne variacije sledi $|\lambda|(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$.

2. $|\lambda|$ je končna (pozitivna) mera

$$\lambda = \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda, \quad |\operatorname{Re} \lambda|, |\operatorname{Im} \lambda| \leq |\lambda| \leq |\operatorname{Re} \lambda| + |\operatorname{Im} \lambda|$$

$$|\lambda| \text{ končna} \Leftrightarrow |\lambda|(X) < \infty$$

Zato je dovolj dokazati, da je totalna variacija realne mere vedno končna (pozitivna) mera.

BŠS λ je realna mera

Predpostavimo, da je $|\lambda|(X) = \infty$. Po definiciji totalne variacije obstaja particija $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za X , da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(X_n)$ poljubno veliko.

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) \geq 0\} \text{ in } T = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) < 0\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(X_n)| = \sum_{n \in S} \lambda(X_n) - \sum_{n \in T} \lambda(X_n)$$

Zato je $\sum_{n \in S} \lambda(X_n)$ ali $\sum_{n \in T} \lambda(X_n)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti.

Oglejmo si $E := \bigcup_{n \in S} X_n$ in $F := \bigcup_{n \in T} X_n$. Tedaj je $\lambda(E)$ ali $\lambda(F)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti. Dokazali smo: če je $Y \in \mathcal{A}$ in

$|\lambda|(Y) = \infty$, potem $\exists Z \subseteq Y$ merljiva, da je $|\lambda|(Z)$ poljubno veliko.

Definiramo $A_1 = X \Rightarrow |\lambda|(A_1) = \infty \Rightarrow \exists Y_1 \subseteq A_1$ merljiva, da je

$$|\lambda|(Y_1)| \geq |\lambda|(A_1)| + 1$$

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline Y_1 & A_1 \setminus Y_1 \\ \hline \end{array}}^{A_1} \Rightarrow |\lambda|(Y_1) = \infty \text{ ali } |\lambda|(A_1 \setminus Y_1) = \infty$$

Označimo z A_2 tisto množico med Y_1 in $A_1 \setminus Y_1$, da je $|\lambda|(A_2) = \infty$.

Če je $A_2 = Y_1$, potem je $|\lambda|(A_2)| \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Če je } A_2 = A_1 \setminus Y_1, \text{ potem je } |\lambda|(A_2)| &= |\lambda|(A_1 \setminus Y_1)| = |\lambda(A_1) - \lambda(Y_1)| \geq \\ &\geq ||\lambda(A_1)| - |\lambda(Y_1)|| \geq 1 \end{aligned}$$

Torej $A_1 \rightsquigarrow A_2 : |\lambda|(A_2) = \infty$ in $|\lambda|(A_2)| \geq 1$.

Po prej dokazanem $\exists Y_2 \subseteq A_2$ merljiva, da je $|\lambda|(Y_2)| \geq |\lambda|(A_2)| + 2$.

Naj bo A_3 tista množica med Y_2 in $A_2 \setminus Y_2$, da je $|\lambda|(A_3) = \infty$.

Če je $A_3 = Y_2$, potem je $|\lambda|(A_3)| = |\lambda|(A_2)| \geq 2$.

Sicer $A_3 = A_2 \setminus \gamma_2$ in zato $|\lambda(A_3)| \geq |\lambda(A_2)| - |\lambda(\gamma_2)| \geq 2$.

Z indukcijo dokažemo obstoj padajočega zaporedja množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da je $|\lambda(A_n)| = \infty$ in $|\lambda(A_n)| \geq n-1$.

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda(A)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda(A_n)| \longrightarrow \infty.$$

Protislovje z $\lambda(A) \in \mathbb{R}$. Zato je $|\lambda|(X) < \infty$. □

Če sta λ in μ kompleksni meri na $(X, \mathcal{A})$ in $d \in \mathbb{C}$, potem

$$\text{definiramo } (\lambda + \mu)(E) := \lambda(E) + \mu(E)$$

$$(d\mu)(E) := d\mu(E).$$

Preverimo lahko, da sta $\lambda + \mu$ in $d\lambda$ tudi kompleksni meri (DM).

Z $M(X)$ označimo prostor vseh kompleksnih mer. $M(X)$ je kompleksni vektorski prostor. V $M(X)$ vpeljemo $\|\lambda\| := |\lambda|(X)$.

Izrek: $(M(X), \|\cdot\|)$ je Banachov prostor.

V dokazu uporabimo naslednjo trditev: Normiran prostor je Banachov $\Leftrightarrow$ vsaka absolutno konvergentna vrsta konvergira.

4.2. Absolutna zveznost in vzajemna singularnost mer

Naj bo μ pozitivna mera in λ kompleksna mera. Pravimo, da je λ **absolutno zvezna** glede na μ , če velja $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$.

Oznaka: $\lambda \ll \mu$.

Lema: $\lambda \ll \mu \Leftrightarrow |\lambda| \ll \mu$.

Dokaz: $(\Leftarrow)$: $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$

Ker je $|\lambda| \ll \mu$, je $|\lambda|(E) = 0$.

Ker $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$

$(\Rightarrow)$: $E: \mu(E) = 0 \Rightarrow |\lambda|(E) = 0$

Naj bo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za E .

$$\mu(E) \rightarrow \mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda \ll \mu} \lambda(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| = 0 \quad \forall \text{ particijo } (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ za } E \Rightarrow \mu(E) = 0$$



Izrek: Naj bo λ kompleksna mera in μ pozitivna mera. Tedaj je $\lambda \ll \mu$ natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon$.

Dokaz: ($\Leftarrow$): $\mu(E) = 0$

Po predpostavki $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon$. Ker je $\mu(E) = 0 < \delta$, je $|\lambda(E)| < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$. Zato je $\lambda(E) = 0$.

($\Rightarrow$): Predpostavimo, da ε - δ trditve ne drži. Torej

$$\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists A. \mu(A) < \delta \text{ in } |\lambda(A)| \geq \varepsilon.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo takšen $A_n \in \mathcal{A}$, da je $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ in $|\lambda(A_n)| \geq \varepsilon$.

Definiramo $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Velja

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

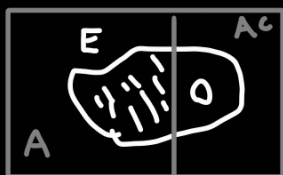
$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0.$$

$$|\lambda|(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|(B_n) \geq \varepsilon \quad (|\lambda|(B_n) \geq |\lambda|(A_n) \geq |\lambda(A_n)| \geq \varepsilon)$$

Zato $|\lambda| \not\ll \mu$, oziroma $\lambda \not\ll \mu$.

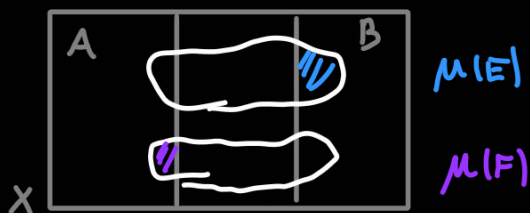


Naj bo λ mera. λ je **skoncentrirana** na $A \in \mathcal{A}$, če je $\lambda(E) = \lambda(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$.



Po domače: λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(B) = 0$ za vsako merljivo množico $B \subseteq A^c$ oziroma " λ živi v A ".

Meri λ in μ sta **vzajemno singularni**, če obstajata disjunktni množici $A, B \in \mathcal{A}$, da je λ skoncentrirana na A , μ pa na B .



Zato dostikrat v definiciji lahko avtomatično privzamemo, da je $A \cup B = X$.

Trditev: Naj bosta λ in μ kompleksni meri.

- i) Če je λ pozitivna, potem je λ skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(A^c) = 0$.
- ii) λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow |\lambda|$ skoncentrirana na A .
- iii) $\lambda \perp \mu$ vzajemno singularni $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}$. $|\lambda|(A) = 0$ in $|\mu|(A^c) = 0$.

Dokaz: (ii) ($\Leftarrow$): $\lambda(B) = 0 \quad \forall B \subseteq A^c$
 $|\lambda(B)| \leq |\lambda|(B) = 0$

($\Rightarrow$): $B \subseteq A^c \Rightarrow |\lambda|(B) = 0$

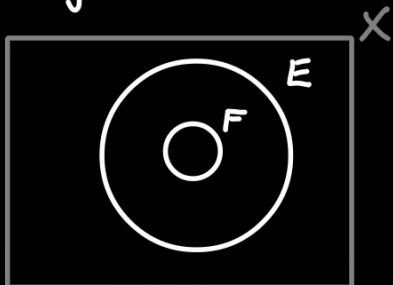
$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za B $\lambda(B_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_n)| = 0$

Supremum po vseh particijah: $|\lambda|(B) = 0$.

(i) in (iii) DN. ▣

4.3. Razcep realne mere

Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$.



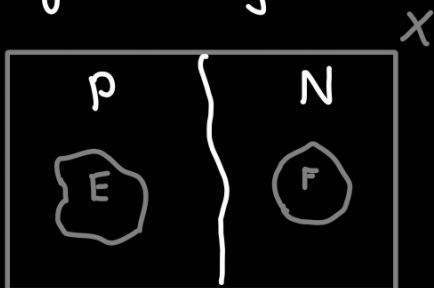
$E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$

$\lambda(E) > 0$, $\lambda(E) = 0$ ali $\lambda(E) < 0$

Recimo $\lambda(E) \geq 0$. $F \subseteq E$ merljiva

Ali je $\lambda(E) \geq 0$?

Velja naslednje:



Imamo razcep:

$X = P \cup N$; $P, N \in \mathcal{A}$, $P \cap N = \emptyset$

$\forall E \subseteq P$. $\forall F \subseteq N$ merljivi:

$\lambda(E) \geq 0$ in $\lambda(F) \leq 0$

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in λ kompleksna mera. Množica $A \in \mathcal{A}$ je:

- λ -pozitivna, če je $\lambda(E) \geq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ -negativna, če je $\lambda(E) \leq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ -ničelna, če je $\lambda(E) = 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$.

Presek λ -pozitivne in λ -negativne množice je λ -ničelna množica. Vsaka λ -ničelna množica je λ -pozitivna in λ -negativna.

Lema: Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Tedaj vsaka merljiva množica E vsebuje λ -pozitivno množico P za katero velja $\lambda(P) \geq \lambda(E)$.

Dokaz: Najprej dokažimo, da za vsako merljivo množico A in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna merljiva množica $P_\varepsilon \subseteq A$, da je $\lambda(P_\varepsilon) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\varepsilon$ za vsako merljivo množico $B \subseteq P_\varepsilon$.

S protislovjem: recimo, da obstaja takšen $\varepsilon > 0$, da za vsako takšno merljivo množico $C \subseteq A$, za katero velja $\lambda(C) \geq \lambda(A)$, obstaja takšna merljiva množica $B \subseteq C$, da je $\lambda(B) < -\varepsilon$.

$\Rightarrow$ Najdemo $B_1 \subseteq A$, da je $\lambda(B_1) < -\varepsilon$. Ker je $\lambda(A \setminus B_1) = \lambda(A) - \lambda(B_1) > \lambda(A) + \varepsilon$, obstaja takšen $B_2 \subseteq A \setminus B_1$, da je $\lambda(B_2) < -\varepsilon$. Z indukcijo konstruiramo zaporedje takšnih parovna disjunktne množic $(B_n)_n$, da je $\lambda(B_n) < -\varepsilon$ in $B_n \subseteq A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$.

$\Rightarrow B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = -\infty \quad \times$

Po ravno kar dokazanem $\exists P_1 \subseteq A$ merljiva, da $\lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall B \subseteq P_1$ merljivo. ...

$\exists P_2 \subseteq P_1$ merljiva, da $\lambda(P_2) \geq \lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall B \subseteq P_2$ merljiva.

$\Rightarrow$ Z indukcijo konstruiramo padajoče zaporedje $(P_n)_n$ merljivih množic, da $\lambda(P_n) \geq \lambda(A) \forall n$ in $\forall B \subseteq P_n$ merljivo je $\lambda(B) \geq -\frac{1}{n}$. Definiramo $P := \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$. Tedaj je $\lambda(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) \geq \lambda(A)$ in če je $B \subseteq P$ merljivo, potem $B \subseteq P \subseteq P_n \Rightarrow \lambda(B) \geq -\frac{1}{n} \rightarrow 0$.
 $\Rightarrow \lambda(B) \geq 0$. Torej je P λ -pozitivna. ▣

Izrek [Hahnov razcep realne mere]:

Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstaja takšna λ -pozitivna množica P in takšna λ -negativna množica N , da je $X = P \cup N$ in $P \cap N = \emptyset$.

Če obstaja še en takšen par $(\tilde{N}, \tilde{P})$, potem sta $(P \setminus \tilde{P}) \cup (\tilde{P} \setminus P)$ in $(N \setminus \tilde{N}) \cup (\tilde{N} \setminus N)$ λ -ničelni množici.

Dokaz: Definirajmo $s := \sup \{ \lambda(A) \mid A \text{ } \lambda\text{-pozitivna} \}$. Ker je $\lambda(A) \geq 0$ in $\lambda(A) \leq |\lambda|(A) \leq |\lambda|(X)$, je $s \in [0, \infty)$.

Obstaja P λ -pozitivna, da je $\lambda(P) = s$.

Obstajajo A_n , A_n je λ -pozitivna in $\lambda(A_n) \rightarrow s$. Definirajmo $P_1 = A_1$, $P_2 = A_1 \cup A_2, \dots, P_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

$\Rightarrow P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$ in $\forall n$ je P_n λ -pozitivna in $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ je tudi λ -pozitivna.

Ker je $(P_n)_n$ naraščajoče: $\lambda(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) = s$. $\begin{matrix} s \geq \lambda(P_n) \geq \lambda(A_n) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ s \quad \quad s \quad \quad s \end{matrix}$

$N := X \setminus P$ je λ -negativna

Če to ni res $\exists E \subseteq N$ merljiva; $\lambda(E) > 0$. Po prejšnji lemi obstaja $P' \subseteq E$ λ -pozitivna, da je $\lambda(P') \geq \lambda(E) > 0$.

$\Rightarrow P' \cup P$ je λ -pozitivna in $\lambda(P' \cup P) = \lambda(P') + \lambda(P) > \lambda(P) = s$,

kar je v protislovju z definicijo s .

Naj bo sedaj $(\tilde{P}, \tilde{N})$ še en tak razcep prostora ($\tilde{P}$ λ -poz, $\tilde{N}$ λ -neg).

$\Rightarrow (P \setminus P') \cup (P' \setminus P) = (P \cap \tilde{P}^c) \cup (\tilde{P} \cap P^c)$

$$= \underbrace{(P \cap \tilde{N})}_{\nwarrow \nearrow \lambda \text{ ničelni}} \cup \underbrace{(\tilde{P} \cap N)$$

$\Rightarrow$ tudi unija je λ -ničelna. Podobno $(N \cap \tilde{N}) \cup (\tilde{N} \cap N)$. ▣

Vsak par (P, N) iz izreka imenujemo **Hahnov razcep** prostora X glede na λ oziroma Hahnov razcep realne mere λ .

16. december 2025

Jordanov razcep realne mere:

Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstajata enolično določeni pozitivni meri λ^+ in λ^- na $(X, \mathcal{A})$, da je $\lambda^+ \perp \lambda^-$ in velja $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Opomba: λ^+ in λ^- se zaporedoma imenujeta **pozitivni** in **negativni** del mere λ .

Dokaz: Naj bo (P, N) nek Hahnov razcep za λ . To pomeni, da je P λ -pozitivna množica, N je λ -negativna množica, $P \cup N = X$ in $P \cap N = \emptyset$.

Definiramo $\lambda^+(A) := \lambda(A \cap P)$ in $\lambda^-(A) := -\lambda(A \cap N)$ za $\forall A \in \mathcal{A}$. λ^+ in λ^- sta pozitivni meri, saj sta P in N λ -poz. in λ -neg. množica. Ker sta λ^+ in λ^- zaporedoma skoncentrirani na P in N , je $\lambda^+ \perp \lambda^-$.

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A \cap P) - \lambda(A \cap P^c) = \lambda(A \cap P) + \lambda(A \cap N) \\ &= \lambda^+(A) + \lambda^-(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Dokažimo enoličnost Jordanovega razcepa. Naj bo $\lambda = \mu_1 - \mu_2$, kjer sta μ_1 in μ_2 vzajemno singularni pozitivni meri. Naj bo μ_1 skoncentrirana na E , μ_2 pa na F ($E, F \in \mathcal{A}$).

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap E), \mu_2(A) = \mu_2(A \cap F); A \in \mathcal{A}$$



Če zamenjamo E z $E \cup (E \cap F)^c$, lahko BŠ predpostavimo, da je $E \cup F = X$.

Sledi, da je (E, F) še en Hahnov razcep realne mere λ .

Po izreku je $P \Delta E$ in $N \Delta F$ λ -ničelni množici

$$\mu_1 = \lambda^+ \text{ in } \mu_2 = \lambda^-$$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}: \mu_1(A) &= \mu_1(A \cap E) = \mu_1(A \cap E) - \mu_2(A \cap E) \\ &= \lambda(A \cap E) = \lambda(A \cap E \cap P) + \lambda(A \cap E \cap P^c) \\ &= \lambda(A \cap E \cap P) = \lambda(A \cap E \cap P) + \lambda(A \cap E^c \cap P) \\ &= \lambda(A \cap P) \\ &= \lambda^+(A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \lambda^+ \Rightarrow \mu_2 = \mu_1 - \lambda = \lambda^+ - \lambda = \lambda^-$$



4.4. Lebesgue-Radon-Nikodýmův izrek

Motivacija: $f \in L^1(\mu)$ in μ pozitivna mera, potem definiramo λ :

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

Tedaj je λ kompleksna mera in $\lambda \ll \mu$.

Vprašanje: Naj bo μ σ -končna pozitivna mera in λ kompleksna mera, da je $\lambda \ll \mu$. Ali obstaja $f \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})? \quad \text{Da.}$$

Lema: Naj bosta μ in λ končni pozitivni meri. Tedaj je bodisi $\lambda \perp \mu$ bodisi obstaja $\varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda \geq \varepsilon \mu$ na E .

Dokaz: Naj bo $X = P_n \cup N_n$ Hahnov razcep za $\lambda - \frac{1}{n} \mu$. Definiramo $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ in $N := \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$. N je negativna množica za mero $\lambda - \frac{1}{n} \mu$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Velja $0 \leq \lambda(N) \leq \frac{1}{n} \mu(N) \longrightarrow 0$.

$\Rightarrow \lambda(N) = 0$. Zato je λ skoncentrirana na $N^c = P$. Če je $\mu(P) = 0$, je μ skoncentrirana na $P^c = N$ in zato $\lambda \perp \mu$. Če je $\mu(P) > 0$, sledi $\mu(P_n) > 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Zato tudi velja $\lambda \geq \frac{1}{n} \mu$ na P_n .

Lema: Naj bo $f \in L^1(\mu)$. Tedaj je $f=0$ s.p. na $X \Leftrightarrow \int_A f d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$: $\checkmark$

$$(\Leftarrow): \int_A f d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\int_A \operatorname{Re} f d\mu + i \int_A \operatorname{Im} f d\mu \Rightarrow \int_A \operatorname{Re} f d\mu = \int_A \operatorname{Im} f d\mu = 0$$

Naj bo $g \in L^1(\mu)$ taku, da je $\int_A g d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$$g = g^+ + g^- \quad X^+ = \{x \mid g(x) \geq 0\}, \quad X^- = \{x \mid g(x) < 0\}.$$

$$X^+ \cup X^- = X, \quad X^+ \cap X^- = \emptyset$$

$$\int_{X^+} g d\mu = 0 \text{ in } g \geq 0 \text{ na } X^+ \Rightarrow g \equiv 0 \text{ s.p. na } X^+$$

Podobno $g \equiv 0$ s.p. na X^- . Zato $g \equiv 0$ s.p. □

Izrek [Lebesgue-Radon-Nikodym]: Naj bo λ kompleksna mera in μ σ -končna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstujata enolično določeni kompleksni meri λ_a in λ_s , da je $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ in $\lambda_s \perp \mu$. Dodatno obstaja skrajšaj povsod enolično določena funkcija $f \in L^1(\mu)$, da je $\lambda_a(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Funkcija f se imenuje **Radon-Nikodymov odvod** mere λ_a po meri μ . Dostikrat zapišemo $f = \frac{d\lambda_a}{d\mu} \quad (\Leftarrow) \quad f d\mu = d\lambda_a$

$$(\Leftarrow) \quad \int_E f d\mu = \int_E d\lambda_a \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$$(\Leftarrow) \quad \int_E f d\mu = \lambda_a(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Opomba: Naj bosta μ in λ σ -končni pozitivni meri. Če je $\lambda \ll \mu$, potem $\exists f \geq 0$ merljiva, da je $\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Opomba: Razcep $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ je **Lebesgueov razcep** mere.

$d\lambda_a = f d\mu \rightarrow$ Radon-Nikodymov izrek.

Dokaz: Enoličnost: Recimo $\lambda = \lambda_a + \lambda_s + \lambda'_a + \lambda'_s$ za $\lambda_a, \lambda'_a, \lambda_s, \lambda'_s$ komp. mere, da je $\lambda_a, \lambda'_a \ll \mu$, $\lambda_s, \lambda'_s \perp \mu$.

$$\underbrace{\lambda_a - \lambda'_a}_{\lambda_1} = \underbrace{\lambda'_s - \lambda_s}_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \ll \mu, \lambda_2 \perp \mu$$

Ker $\lambda_1 = \lambda_2$, je $\lambda_1 \ll \mu$ in $\lambda_1 \perp \mu$, zato $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$
 $\Rightarrow \lambda_a = \lambda'_a$ in $\lambda_s = \lambda'_s$.

Če obstaja še en $\tilde{f} \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda_a(E) = \int_E \tilde{f} d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

$$\Rightarrow \lambda_a(E) = \int_E \tilde{f} d\mu = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow \int_E (\tilde{f} - f) d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Po prejšnji lemi je $\tilde{f} - f = 0$ s.p. na X .

Eksistencija: Dokaz prevedemo na pozitivne mere. Če je γ komp., potem $\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \ll \mu$

$$\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \perp \mu$$

Če je γ realna, potem $\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \gamma^+, \gamma^- \ll \mu$ in
 $\gamma \perp \mu \Leftrightarrow \gamma^+, \gamma^- \perp \mu$.

Zato se omejimo na primer, ko je λ pozitivna mera.

(λ realna $\leadsto$ uporabimo L-R-N za λ^+, λ^- ; λ komp. $\leadsto \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda$).

Brez škode za splošnost je λ pozitivna mera.

1.korak: μ je končna (pozitivna mera)

Definiramo $\mathcal{D} := \{g: X \rightarrow [0, \infty] \text{ merljiva, da je } \int_A g d\mu \leq \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$.

Izkaže se, da bo iskan tisti $g \in \mathcal{D}$, ki ima $\int_X g d\mu$ največji.

$$g_1, g_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \sup\{g_1, g_2\} \in \mathcal{D}$$

$$E := \{x \in X \mid g_1(x) \geq g_2(x)\}$$

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \int_{A \cap E} g d\mu + \int_{A \cap E^c} g d\mu \leq \int_{A \cap E} g_1 d\mu + \int_{A \cap E^c} g_2 d\mu \\ &\leq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c) = \lambda(A) \end{aligned}$$

Če je $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ in $g_n \nearrow g$, potem je po LMK za $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lambda(A).$$

Definiramo $s := \sup \left\{ \int_X g d\mu \mid g \in D \right\}$.

Obstaja zaporedje funkcij $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$, da $\int_X g_n d\mu \rightarrow s$.

$$f_n := \max \{g_1, \dots, g_n\} \in D$$

$$f = \sup f_n \in D : \quad s \geq \int_X f d\mu \geq \int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu$$

Definiramo λ_a kot $\lambda_a(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$. Tedy $\lambda_a \ll \mu$.

Definiramo $\lambda_s := \lambda - \lambda_a$.

$$\lambda_s \perp \mu$$

Če $\lambda_s \not\perp \mu$, po lemi $\exists \varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda_s \geq \varepsilon \mu$ na E (na $(E, \mathcal{A}_E)$).

$$\varepsilon \chi_E d\mu \leq d\lambda_s = d\lambda - d\lambda_a = d\lambda - f d\mu$$

$$\Rightarrow (\varepsilon \chi_E + f) d\mu \leq d\lambda \quad \text{na } (X, \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \varepsilon \chi_E + f \in D \quad \text{in} \quad \int_X (\varepsilon \chi_E + f) d\mu = s + \mu(E) > s \quad \times$$

$$\Rightarrow \lambda_s \perp \lambda$$

2.korak: μ σ -končna $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \cap X_m = \emptyset$, $m \neq n$ in $\mu(X_n) < \infty$

Uporabimo ravnoškur dokazano na nelem kosu X_n in nato dobljene mere in funkcije "seštejemo".

Zakaj je $f \in L^1(\mu)$?

$$\lambda_a(X) = \int_X f d\mu \leq \lambda(X) < \infty \quad (\lambda \text{ končna poz. mera})$$

