

3. INTEGRAL

3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j} \quad (s \text{ merljiva})$$

definiramo $\int_X s d\mu := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$.

Če je $s = \chi_A$, potem $\int_X s d\mu = \mu(A)$.

Izkaže se, da je $\int_X s d\mu$ neodvisen od izbire A_j in c_j . Torej lahko dostikrat prevzamemo, da je s zapisan v kanonični obliki.

Če je A merljiva, definiramo $\int_A s d\mu := \int_X s \chi_A d\mu$.

Lema: Naj bo $s: X \rightarrow [0, \infty)$ merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z $\gamma(A) := \int_A s d\mu$ definirana pozitivna mera $(X, \mathcal{A})$.

Dokaz: $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \int_X s \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne merljive množice in naj bo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $\gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$

Naj bo $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika za s .

$$s \chi_A = \left(\sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \right) \chi_A = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(A) &= \int_A s d\mu = \int_X s \chi_A d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap A) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
&\stackrel{ANA 1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} s d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)
\end{aligned}$$



Lema: Naj bosta $s, t: X \rightarrow [0, \infty]$ merljivi stopničasti funkciji in naj bo $c \in [0, \infty]$. Tedaj velja:

i) $\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$

ii) $\int_X c s d\mu = c \int_X s d\mu$

Dokaz: i) $s := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$, $t := \sum_{j=1}^n d_j \chi_{F_j}$ zapisa v kanonični obliki

Tedaj je $s+t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}$.

Čeprav so množice $E_i \cap F_j$ paroma disjunktne, to ni njeno kanonična oblika za $s+t$. Velja pa

$$\begin{aligned}
\int_X (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j \mu(E_i \cap F_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^n F_j &= X \\
\bigcup_{i=1}^m E_i &= X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{i=1}^m \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^n d_j \mu(F_j)
\end{aligned}$$

$$= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

ii) $\int_X c s d\mu = \sum_{i=1}^m c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) = c \int_X s d\mu$



Lema: Naj bosta s, t takšni merljivi stopničasti funkciji, da velja $0 \leq s \leq t$. Tedaj je $0 \leq \int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu$.

Dokaz: $t = t - s + s$. Po prejšnji lemi:

$$\int_X t d\mu = \int_X (t - s) d\mu + \int_X s d\mu \geq \int_X s d\mu \geq 0$$



3.2. Integral nenegativne merljive funkcije

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva.

S $\mathcal{I}_f$ definiramo množico $\{s \mid 0 \leq s \leq f \text{ merljiva stopničasta funkcija}\}$.

Definiramo: $\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \in \mathcal{I}_f \right\}$.

Lema: Naj bosta $0 \leq f \leq g$ merljivi. Potem je $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Dokaz: $\mathcal{I}_f \subseteq \mathcal{I}_g \Rightarrow \text{supremum po } \mathcal{I}_f \leq \text{supremum po } \mathcal{I}_g$



Primer: $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$, δ_{x_0} Diracova mera

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

$$0 \leq s \leq f \Rightarrow \int_X f d\delta_{x_0} \geq \int_X s d\delta_{x_0} \quad s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \quad \text{kanoni\u010den oblika}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_0}(E_j) = c_k \cdot 1 = s(x_0) \quad (x_0 \in E_k)$$

Ker $s_n \nearrow f$ po to\u010dkah (izrek o aproksimaciji), dobimo $\int_X f d\delta_{x_0} \geq f(x_0)$.

$$\int_X s d\delta_{x_0} = s(x_0) \leq f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh $s \in \mathcal{I}_f$.

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$: μ steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \leftrightarrow a_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]:

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$.

Dokaz: Ker je $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

$$a = \int_X f d\mu; \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

$$a \leq \int_X f d\mu, \text{ saj } f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a \geq \int_X f d\mu \Leftrightarrow a \geq \int_X c s d\mu \quad \forall c \in (0,1) \quad \forall s \in \mathcal{F}_f$$

($\Rightarrow$): $\checkmark$ zaradi monotonosti

($\Leftarrow$): sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po $c \in (0,1)$ in nato supremum po vseh $s \in \mathcal{F}_f$.

Izberimo $c \in (0,1)$ in $s \in \mathcal{F}_f$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid cs(x) \leq f_n(x)\}.$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definiramo mero ν s predpisom $\nu(B) = \int_B c s d\mu$. To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X c s d\mu = \nu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} c s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = a$$

saj $f_n \geq cs$ na A_n



Izrek: Naj bodo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokažimo $\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

$\exists$ zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da $0 \leq s_n \nearrow f_1$ in $0 \leq t_n \nearrow f_2$ po točkah.

$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{s_n + t_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$ po točkah

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) d\mu &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n d\mu \\ &\stackrel{2 \times \text{LMK}}{=} \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \end{aligned}$$

V splošnem: $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \leq g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu \stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$



12. november 2025

Posledica: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva in $c \geq 0$. Tedaj velja

$$\int_X c f d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takšne merljive stopničaste funkcije, da $0 \leq s_n \nearrow f$. Vemo, da velja

$$\int_X c f d\mu \stackrel{\text{LMK za } 0 \leq c s_n \nearrow c f}{=} \int_X c s_n d\mu = c \cdot \int_X s_n d\mu \stackrel{\text{LMK za } 0 \leq s_n \nearrow f}{=} c \cdot \int_X f d\mu$$



Trditve: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva. Definiramo

$$\nu(A) = \int_A f d\mu; \quad A \in \mathcal{A}. \text{ Velja:}$$

- i) ν je pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.
- ii) Če je $\mu(A) = 0$, potem je $\nu(A) = 0$.
- iii) Če je $g: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva, potem $\int_X g d\nu = \int_X f \cdot g d\mu$.

Opomba: (a) Pogoji $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, se imenuje **absolutna zveznost** mere ν glede na mero μ .

(b) Če je ν glede na μ absolutno zvezna, to zapišemo $\nu \ll \mu$,
 f iz trditve pa zapišemo kot $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. (" $\int_A f d\mu = \int_A d\nu = \nu(A)$ ")

Dokaz: i) $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X f \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne in $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, potem

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X \left(f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \right) d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \end{aligned}$$

ii) Naj bo $\mu(A) = 0$.

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$$

Naj bodo $0 \leq s_n \leq f \chi_A$; s merljive stopničaste

$$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} \quad (\text{kanonična oblika})$$

$$f \chi_A \equiv 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s \equiv 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = s \chi_A$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$$

$$\Rightarrow \int_X f \chi_A d\mu = 0 \quad (\text{po definiciji integrala nenegativne funkcije})$$

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a) $g = \chi_A$; A merljiva

$$\int_X g d\gamma = \int_X \chi_A d\gamma = \gamma(A)$$

$$\int_X fg d\mu = \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f d\mu = \gamma(A)$$

b) $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$; $A_1, \dots, A_n$ merljive

$$\begin{aligned} \int_X g d\gamma &= \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}}_g \right) f d\mu \end{aligned}$$

c) $g \geq 0$ merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij: $0 \leq s_n \nearrow g$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_X s_n d\gamma = \int_X s_n f d\mu$$

LMK za γ
in $0 \leq s_n \nearrow g$

$$\int_X g d\gamma$$

LMK za μ in $0 \leq s_n f \nearrow gf$

$$\int_X gf d\mu$$

Fatoujeva lema: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja: $\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Dokaz: $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \xrightarrow{\leq f_n} 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$

$$\begin{aligned} \text{LMK: } \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \\ &\stackrel{II}{=} \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \end{aligned}$$

($\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, če limita obstaja)
(in $a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$)

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \infty, \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} d\mu = 0$$

$\Rightarrow$ V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenačaj.

18. november 2025

Če je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\mu(A) = 0$, potem je $\int_A f d\mu = 0$ za vsako merljivo funkcijo $f \geq 0$.

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

Trditev: Naj bo $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ merljiva. Tedaj velja:

i) $\int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0.$

ii) $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.p.

Dokaz: i) $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ii) $(\Leftarrow)$: $f = 0$ s.p. $\Rightarrow X = E \cup E^c$, $\mu(E) = 0$, $f|_{E^c} = 0$

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = 0 + 0 = 0.$$

int. po meri 0 int. ničelne funkcije

$(\Rightarrow)$: Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. To je merljiva množica, saj je preslika zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0, \quad \{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$



3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral od $\chi_E - \chi_F$.

Naivno: $\int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$

Težava: lahko dobimo $\infty - \infty$, kar ni ok.

Merljiva funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je **integrabilna**, če je integral $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$. Če je $\|f\|_1 < \infty$, potem pišemo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
V $\mathcal{L}^0(\mu)$ označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$? Preverimo $\int_X |f| d\mu < \infty$.

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \Rightarrow |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \\ \Rightarrow |f| \geq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$$

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

g realna merljiva funkcija $\Rightarrow g = g^+ - g^-$; g^+, g^- merljivi
 $\min\{g^+, g^-\} = 0$

$$\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu$$

$$\Rightarrow (g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in \mathcal{L}^1(\mu))$$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$\int_X f d\mu := \int_X (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_X (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \left(\int_X (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - \int_X (\operatorname{Im} f)^- d\mu \right)$$

Lema: Če $\mathcal{L}^1(\mu)$ opremimo z operacijami po točkah, potem je $\mathcal{L}^1(\mu)$ vektorski prostor, $\|\cdot\|_1$ pa je polnorma na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dokaz: $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\|_1 &= \int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X (|\alpha| |f| + |\beta| |g|) d\mu \\ &= |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ in $\|\alpha f + \beta g\|_1 \leq \|\alpha f\|_1 + \|\beta g\|_1$ (trikotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$ je polnorma:

i) $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \checkmark$

ii) $\|\alpha f\|_1 = \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) trikotniška neenakost $\checkmark$



Opomba: V splošnem $\mathcal{L}^1(\mu)$ ni normiran prostor:

$$X = \mathbb{R}, \mu = m, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

C... Cantorjeva množica z $m(C) = 0$

$$\|X_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} X_C dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normiran (v splošnem), lahko mu pa priredimo normiran prostor, ki "vsebuje vse informacije o $\mathcal{L}^1(\mu)$ ".

Vpeljimo relacijo $\sim$ na $\mathcal{L}^1(\mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p.

• $f \sim f \quad \checkmark$

• $f \sim g \Rightarrow g \sim f \quad \checkmark$

• $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f = g$ n.a. $A, g = h$ n.a. B

$$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h \text{ n.a. } A \cap B \text{ in } \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$$

Definiramo: $L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu) / \sim$:

$$\|[f]\|_1 := \|f\|_1$$

$$[f] + [g] := [f + g]$$

$$\alpha[f] := [\alpha f]$$

Ali sta operaciji dobro definirani? Da.

$$\begin{aligned} \cdot f \sim f', g \sim g' : [f] + [g] &= [f+g] \\ [f'] + [g'] &= [f'+g'] \end{aligned} \quad))?$$

$$\begin{aligned} f \sim f', g \sim g' &\Rightarrow f = f' \text{ na } A, g = g' \text{ na } B \\ \mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 &\Rightarrow f+g = f'+g' \text{ na } A \cap B \text{ in} \\ \mu((A \cap B)^c) &\leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f+g &\sim f'+g' \\ \cdot d[f] &= [df] \text{ DN.} \end{aligned}$$

Posledica: $L^1(\mu)$ je normiran prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz $\mathcal{L}^1(\mu)$ na $L^1(\mu)$.

$$\|[f]\|_1 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow |f| = 0 \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] \sim [0]$$



Zakaj je norma $\|[f]\|_1$ dobro definirana?

$$[f] = [f'] \Rightarrow f \sim f' = f = f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f| = |f'| \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |f'| d\mu \Rightarrow \|f\|_1 = \|f'\|_1$$

Trditev: Za $\mathcal{L}^1$ -funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

ii) Če sta $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ v $\mathcal{L}^1(\mu)$ in $f \leq g$, potem je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Kaj pomeni $f \leq g$?

$f \leq g$ p.t. točkah

$$\text{iii) } \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$f \leq g \text{ s.p.} \Leftrightarrow f \leq g \text{ v } L^0(\mu)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ &[f] \leq [g] \end{aligned}$$

Dokaz: i) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

f, g realni: $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$

Raje pišimo $h := f+g$

$$h = h^+ - h^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+) d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(f+g)}_h d\mu$$

Za kompleksne funkcije DN ($f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$).

Množenje s skalarji: le za $\alpha \geq 0$:

$$\int_X \alpha f d\mu = \int_X \alpha (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) d\mu$$

$$= \int_X \alpha \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \alpha \operatorname{Im} f d\mu$$

$$= \int_X (\alpha (\operatorname{Re} f)^+ - \alpha (\operatorname{Re} f)^-) d\mu + i \int_X (\alpha (\operatorname{Im} f)^+ - \alpha (\operatorname{Im} f)^-) d\mu$$

$$= \underbrace{\int_X \alpha (\operatorname{Re} f)^+ d\mu}_{\geq 0} - \underbrace{\int_X \alpha (\operatorname{Re} f)^- d\mu}_{\geq 0} + i \underbrace{\int_X \alpha (\operatorname{Im} f)^+ d\mu}_{\geq 0} + i \underbrace{\int_X \alpha (\operatorname{Im} f)^- d\mu}_{\geq 0}$$

Preostanek (i) izpustimo.

(ii) $g = g - f + f$

$$\Rightarrow \int_X g d\mu = \underbrace{\int_X (g-f) d\mu}_{\geq 0} + \int_X f d\mu$$

$\int_a^b f(x) dx$ Riemann
 $\int f d\mu$ Lebesgue
 $[a, b]$
 $\hookrightarrow$ nekateri pišejo
 $\int_a^b f dx$
 $[a, b]$
 Hujša zloraba
 $\int_a^b f(x) dx$
 Mogoče bi morali
 pisati celo
 $\int_X f(x) d\mu(x)$

iii) Če je $\int_X f d\mu = 0$, potem neenakost drži.

BŠS. $d := \int_X f d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w. |w|$ in $w d = |d|$.

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= |d| = w d = w \cdot \int_X f d\mu = \int_X w f d\mu = \operatorname{Re} \int_X w f d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(w f) d\mu \leq \int_X |w f| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $|w|=1$

Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK): angleščina: (LDC)

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji f . Če $\exists g \in L^1(\mu)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ in } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Opomba: $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ v } L^1(\mu).$

Dokaz: Kot v dokazu izreka deyarova, lahko BŠS predpostavimo, da $f_n \rightarrow f$ po točkah in $|f_n| \leq g \quad \forall n$ povsod na X .

$$\left. \begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_n \geq 0$$

Po Fatovjevi lemi:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

$\parallel$ $\quad \quad \quad \parallel$

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu =$$

$$= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (-|f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$ in je enaka 0

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025

Kako v praksi preverimo, da je normiran prostor Banachov?

i) Vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira (poiščemo limito).

ii) Dokazemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Trditev: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takšno zaporedje L^1 -funkcij, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira skoraj povsod proti neki L^1 -funkciji f .

Velja še

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Definiramo $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Tedaj je $g: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva in

$$\int_X g d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$ za skoraj vsak $x \in X$

$\Rightarrow$ za skoraj vsak $x \in X$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira absolutno $\Rightarrow$ konvergira

Definiramo $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq g \in L^1(\mu)$

zbruba ustrezje ...
 $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

LDK
je 4.5

$$\Rightarrow \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor $L^1(\mu)$ je Banachov prostor. Če $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, potem obstaja $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, da $f_{n_k} \longrightarrow f$ skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opomba: $p \geq 1$, $\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ($p \neq \infty$)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

$\ell^{\infty} \leftarrow$ omejena zaporedja

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^{\infty} \quad 1 \leq p \leq q$$

$$\mu(X) < \infty \Rightarrow L^{\infty}(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
tega še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]: $L^1(\mu)$ je poln:

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^1(\mu)$. Našli bomo ustrezno podzaporedje, ki bo konvergiralo v $L^1(\mu)$. Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tudi limita prvotnega zaporedja.

Ker je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indeksov, da $\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k} \quad \forall m, n \geq n_k$.

Po trditvi od prej $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ konvergira skoraj povsod proti neki funkciji $f \in L^1(\mu)$.

Ker velja: $f_{n_1} + \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$, podzaporedje $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira proti f skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| d\mu = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1.$$

Torej $f_{n_{k+1}} \rightarrow f$ v $L^1(\mu)$.



3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za particijo P

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

intervala $[a, b]$ definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxovo vsoto:

$$S_P := \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j \quad \text{in} \quad Z_P := \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j,$$

kjer je $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$. Iz Analize 1 vemo, da je f Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow \sup_{P \text{ part}} S_P = \inf_{P \text{ part}} Z_P$.

V primeru, ko je f Riemannovo integrabilna, to število označimo z $\int_a^b f(x) dx$.

Za vsak $j = 1, \dots, n$ in vsak $x \in [x_{j-1}, x_j]$ velja $m_j \leq f(x) \leq M_j$.

Izrek: Riemannovo integrabilna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je Lebesgueovo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\mu.$$

Dokaz: Za particijo P definiramo

$$s_P := \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad z_P := \sum_{j=1}^n M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow s_P \leq f \leq z_P$ za vsako particijo P .

$$\text{Velja } \int_{[a, b]} s_P d\mu = S_P \quad \text{in} \quad \int_{[a, b]} z_P d\mu = Z_P$$

Ker je f Riemannovo integrabilna, obstaja nuraščajoče zaporedje particij $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x) dx$$

(Tukaj zvedla dolžine najsiirših intervalov delitve gredo proti 0.)
Ker je P_{n+1} finejša od P_n , je torej $s_n \leq s_{n+1} \leq f \leq z_{n+1} \leq z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Torej $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ in $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ po točkah dobimo $s_n \leq s \leq f \leq z \leq z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
 s_n, z_n merljivi $\Rightarrow s$ in z merljivi

$$\begin{array}{ccc} \int_{[a,b]} s_n dm & \leq \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} z dm \leq \int_{[a,b]} z_n dm \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx & & \int_a^b f(x) dx \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} z dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s) dm = 0$$

$$\Rightarrow z-s \equiv 0 \text{ s.p. na } [a,b], \text{ saj je } z \geq s.$$

$$\Rightarrow f = z = s \text{ s.p. na } [a,b]$$

$\Rightarrow f$ je Lebesgueovo merljiva, saj je Lebesgueova σ -algebra polna

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f = z & m(B) = 0 \\ \hline f^{-1}(U) \cap A & z^{-1}(U) \cap B \\ z^{-1}(U) \cap A & \subseteq B \\ \hline \end{array}$$

Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} z dm = \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b f(x) dx$$

Izrek: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow$ Lebesgueova mera točk nezveznosti funkcije f je 0.

(f je skoraj povsod zvezna na $[a,b]$)

Brez dokaza.

Primer: Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases}$$

(zgornje meje je ± 2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \frac{dm}{1+x^n} \stackrel{\text{LDK}}{=} \int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} f dm \\ &= 1 \cdot m([0,1)) + 2 \cdot m(\{1\}) = 1 \end{aligned}$$

3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ merljiva prostora.

Produktna σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

Kako definirati produktno mero na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$?

Naj bo $\mathcal{F} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Definiramo

$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

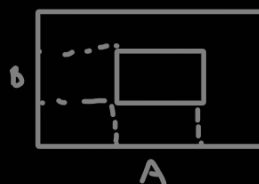
Trditev: $\mathcal{F}$ je polalgebra in $\Theta: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ je polmera.

Dokaz: i) $\emptyset, X \times Y \in \mathcal{F} \checkmark$

$$\text{ii) } A \times B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$$

$$\text{Velja } (A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset.$$

$$\text{iii) } (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$



Θ je polmera na $\mathcal{F}$.

$$\text{i) } \Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$$

ii) in iii) Naj bo $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{F}$ in naj bodo $(A_n \times B_n)$ paroma disjunktne iz $\mathcal{F}$.

$$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n) \quad \text{oziroma} \quad \mu(A) \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \lambda(B_n)$$

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y), \text{ gdje je } \tilde{U}(A_n \times B_n) = A \times B \text{ dijunktna unija}$$

Fiksirajmo $x \in X$:

$$\chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\lambda$$

$\parallel$

$$\chi_A(x) \lambda(B)$$

$\parallel$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \int_Y \chi_{B_n}(y) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \lambda(B_n)$$

SE = ES

$$\Rightarrow \lambda(B) \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in X$$

Integrirajmo po x in kot zgoraj dobimo

$$\lambda(B)\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)\mu(A_n).$$

Izrek: Polmera $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ se da razširiti do mere $A \otimes B$. Če sta μ in λ σ -končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način Θ razširimo do mere na algebri, generirani z $\mathcal{F}$. Ta razširitev je ena sama. Po Carathéodorievem izreku obstaja mera na σ -algebri vseh zunanje merljivih množic, ki razširja Θ .

Če sta μ in λ σ -končni, potem je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n; \quad \mu(X_n) < \infty \quad \text{in} \quad X_n \subseteq X_m \quad \forall n \leq m$$

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \quad \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in} \quad Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n); \quad \Theta(x_n \times y_n) = \mu(x_n) \lambda(y_n) < \infty \quad \text{in}$$

$$X_n \times Y_n \subseteq X_{n+1} \times Y_{n+1}$$

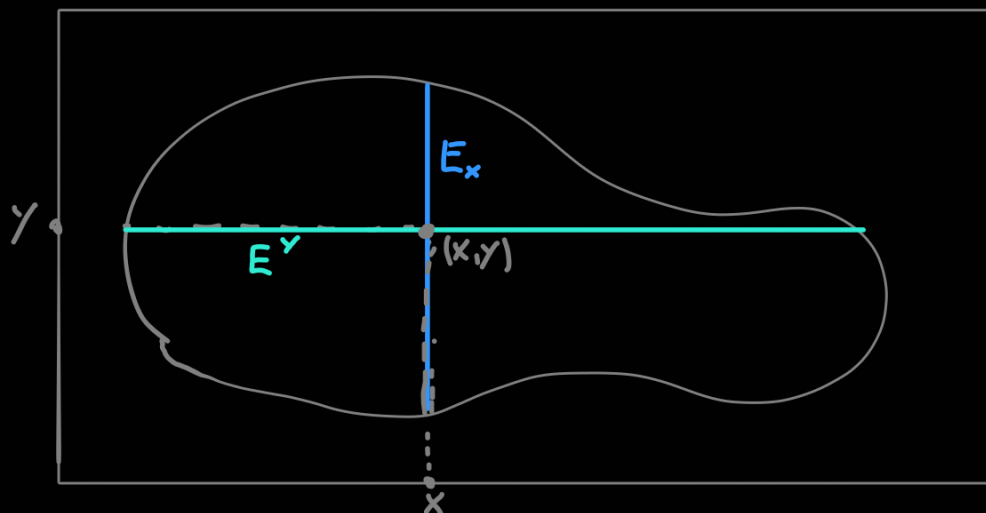
$\Rightarrow$ mera na algebri je σ -končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijevo σ -algebro ena sama. 

V primeru, ko sta X in Y σ -končna, dobljeno enolično mero imenujemo **produktna mera** in jo označimo z $\mu \times \lambda$ oziroma lahko tudi $\mu \otimes \lambda$.

Fubini iz Analize 2: $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna:

$$\begin{aligned} \int_P f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x) dx \end{aligned}$$

Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Za $x \in X$ in $y \in Y$ definiramo **prereza** E_x in E^y z $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$ in $E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$.



Podobno za $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$ definiramo $f_x: Y \rightarrow \mathbb{Z}$ in $f^y: X \rightarrow \mathbb{Z}$ s predpisoma $f_x(y) = f(x, y) = f^y(x)$.

26. november 2025

Primer: Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Tedaj za vse $x \in X$ in $y \in Y$ velja $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ in $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$$

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1; & (x, y) \in E \\ 0; & (x, y) \notin E \end{cases} \stackrel{x \text{ fiksni}}{=} \begin{cases} 1; & y \in E_x \\ 0; & y \notin E_x \end{cases} = \chi_{E_x}$$

Podobno $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

Trditev: i) Naj bo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$ za vse $x \in X$ in $y \in Y$.

ii) Če je f merljiva glede na produktno σ -algebro $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ na $X \times Y$, potem sta f_x in f^y merljivi glede na $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{C}$ družina vseh podmnožic v $X \times Y$, da $\forall E \in \mathcal{C}$ velja $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ je σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow E = A \times B \in \mathcal{C}$$

$$x \in X: x \in A \Rightarrow E_x = B \in \mathcal{B}$$

$$x \notin A \Rightarrow E_x = \emptyset \in \mathcal{B}$$

Podobno $E^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{C} \Rightarrow (E^c)_x &= \{y \in Y \mid (x, y) \in E^c\} \\ &= \{y \in Y \mid (x, y) \notin E\} \\ &= \{y \in Y \mid y \notin E_x\} \\ &= (E_x)^c \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ in podobno za y -prereze. (DN)

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

ii) Naj bo $D \in \mathcal{Z}$ merljiva množica. Izberimo $x \in X$. Ker je f merljiva, je $f^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$$\Rightarrow (f^{-1}(D))_x \in \mathcal{B} \quad \text{in} \quad (f^{-1}(D))^y \in \mathcal{A}$$

$$\stackrel{||?}{(f_x^{-1})(D)}$$

$$\stackrel{||?}{(f^y)^{-1}(D)}$$

$$\Rightarrow (f_x^{-1})(D) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in D\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{y \in Y \mid f(x, y) \in D\} \\
&= \{y \in Y \mid (x, y) \in f^{-1}(D)\} \\
&= \{y \in Y \mid y \in (f^{-1}(D))_x\} \\
&= (f^{-1}(D))_x
\end{aligned}$$

Podobno za y -prereze.



Družine podmnožic $\mathcal{M}$ dane množice je **monotoni razred**, če velja naslednje:

$$i) (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}; A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

$$ii) (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}; A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Ker je presek neprazne družine monotoni razredov zopet monotoni razred, vedno obstaja najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino.

* Vsaka σ -algebra je monotoni razred.

* Vsaka algebra, ki je monotoni razred, je σ -algebra.

Dokaz: $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ algebra

$$\begin{aligned}
\text{Definiramo } B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k &\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A} \\
&\quad \parallel \quad \uparrow \text{monotoni razred} \\
&\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k
\end{aligned}$$

Lema [o monotonem razredu]: Naj bo $\mathcal{A}$ algebra podmnožic množice X . Tedaj je monotoni razred $\mathcal{M}$, generiran z $\mathcal{A}$, σ -algebra.

Opomba: Ta monotoni razred je dejansko σ -algebra, generirana z $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

$$\Downarrow \leftarrow \mathcal{M} \text{ je } \sigma\text{-algebra} \quad \sigma(\mathcal{A}) \text{ je monotoni razred}$$

$$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$$

Dokaz: Po opombi zadostuje dokazati, da je $\mathcal{M}$ algebra. Za $A \in \mathcal{M}$ definiramo

$$\mathcal{M}(A) := \{ B \in \mathcal{M} \mid A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M} \}$$

to lahko vzamemo $\times$
 $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{M}$
 B^c

Za vsak $A \in \mathcal{M}$ je $\mathcal{M}(A)$ monotoni razred. (DN)

Opazimo še $B \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}(B)$.

Vzemimo $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{M}(A) \quad \forall B \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$$

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. B \in \mathcal{M}(A)$$

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(B)$$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}. A \in \mathcal{M}(B) : A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$$

(vsebuje tudi najmanjši monotoni razred generiran z A)
 $\Rightarrow \mathcal{M}(A)$ je monotoni razred
 $\Rightarrow$ vsebuje vsaj najmanjši monotoni razred)

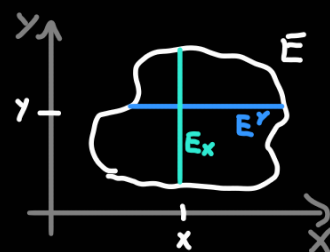
Mali Fubinijev izrek: Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ -končna merljiva prostora. Za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sta funkciji

$$x \mapsto \lambda(E_x) \quad y \mapsto \mu(E^y)$$

merljivi in velja

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\lambda(y).$$

Formulo se prebere lepše kot:



$$\int_X \int_Y \chi_E(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) = \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_E(x, y) d\lambda(y)$$

$$= \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

Zato se ta izrek imenuje "mali Fubinijev izrek".

2. december 2025

Dokaz: Definirajmo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$... vse merljive množice, za katere izrek velja. Dokazali bomo $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Dokazali bomo: i) $\mathcal{E}$ vsebuje vse merljive pravokotnike

ii) $\mathcal{E}$ vsebuje končne disjunktne unije merljivih pravokotnikov

iii) $\mathcal{E}$ je monoton razred

Recimo, da smo i), ii), iii) že dokazali. Tedaj je $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$, kjer je $\mathcal{E}_0$ algebra generirana z merljivimi pravokotniki. Naj bo $\mathcal{M}$ monoton razred generiran z $\mathcal{E}$. Tedaj je $\mathcal{M}$ σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike. Tedaj velja $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

i) $E = A \times B$; $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$E_x = \begin{cases} B & ; x \in A \\ \emptyset & ; x \notin A \end{cases}$$

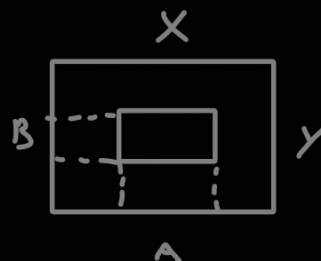
$$\lambda(E_x) = \begin{cases} \lambda(B) & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \lambda(E_x)$$

$\uparrow$

$$x \mapsto \lambda(B) \chi_A$$

je $\mathcal{A}$ -merljiva.



Podobno $y \mapsto \mu(E^y) \Leftrightarrow y \mapsto \mu(A) \chi_B$ je $\mathcal{B}$ -merljiva

$$\int_X \lambda(E_x) d\mu(x) = \lambda(B) \int_X \chi_A d\mu = \lambda(B) \mu(A)$$

$$= (\mu \times \lambda)(A \times B)$$

$$\int_Y \lambda(E^y) d\lambda(y) = \mu(A) \int_Y \chi_B d\lambda = \mu(A) \lambda(B)$$

ii) Naj bosta C in D disjunktne merljive pravokotnika. Ker je $\chi_{C \cup D} = \chi_C + \chi_D$.

$x \mapsto \lambda((C \cup D)_x) = \lambda((C_x \cup D_x)) = \lambda(C_x) + \lambda(D_x)$ je vsota merljivih funkcij, zato je merljiva. Podobno za $y \mapsto \mu((C \cup D)^y)$.

Za enakost integralov upoštevamo aditivnost domene: če Z, W disjunktne, potem $\int_{Z \cup W} = \int_Z + \int_W$.

Za poljubno končno disjunktne unije uporabimo indukcijo.

iii) Naj bo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v $\mathcal{E}$.

Označimo $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$x \mapsto \lambda(E_x)$, $y \mapsto \mu(E^y)$ merljivi

Ker je $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$, je $\lambda(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((E_n)_x)$. Zato je $f: x \mapsto \lambda(E_x)$ limita po točkah zaporedja funkcij $f_n: x \mapsto \lambda((E_n)_x)$. Ker je limita merljivih funkcij merljiva, je $g: x \mapsto \lambda(E_x)$ merljiva.

Podobno je $y \mapsto \mu(E^y)$ merljiva.

$$\int \mu(E^y) d\lambda(y) \stackrel{\text{LMK za } g_n \nearrow g}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu((E_n)^y) d\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \lambda)(E_n) \stackrel{E_n \nearrow E}{=} (\mu \times \lambda)(E)$$

Podobno za $\int \lambda(E_x) d\mu(x) = (\mu \times \lambda)(E)$.

Predpostavimo, da sta μ in λ končni, t.j. $\mu(X) < \infty$, $\lambda(Y) < \infty$.

Naj bo sedaj $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje množic v $\mathcal{E}$ in naj bo E njihov presek. Funkciji $x \mapsto \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \lambda(E^y)$ sta merljivi kot prej. Enakost integralov sledi iz istiga računa kot prej, le da argument $\geq$ LMK nadomestimo z LDK, kjer je dominirajoča funkcija $y \mapsto \mu(E_1^y)$, za zadnjo limito pa uporabimo dejstvo, da je mera preseka limita mer, če je ena od mer množic končna. Podobno za $x \mapsto \lambda(E_x)$.

V splošnem zapišemo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$; $\mu(X_n) < \infty$, $\lambda(Y_n) < \infty$ in $X_n \subseteq X_{n+1}$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Izberimo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E \cap (X_j \times Y_j)$ vsebovana v

$\mathcal{A}|_{X_j} \otimes \mathcal{B}|_{Y_j}$. Tedaj sta funkciji $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y_j)$, $y \mapsto \mu(E^y \cap X_j)$ merljivi. V limiti, ko $j \rightarrow \infty$, dobimo $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y) = \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \mu(E^y \cap X) = \mu(E^y)$, ki sta merljivi funkciji. Preverimo še enakost dvakratnih integralov in produktne mere. Po zgoraj dokazanem velja

$$(\mu \times \lambda)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_{X_j} \lambda(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int_{Y_j} \mu(E^y \cap X_j) d\lambda(y).$$

Funkciji razširimo z 0 na Y_j^c in X_j^c in dobimo po LDK enačbo.



Tonelli-Fubinijev izrek: Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ -končna prostora. Tedaj velja:

Tonelli: Naj bo $F: X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ merljiva funkcija in naj bosta $g(x) := \int_Y f(x, y) d\lambda(y)$ in $h(y) := \int_X f(x, y) d\mu(x)$. Tedaj sta g in h merljivi glede na $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ in velja

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &= \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y) d\mu(x) \\ &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Fubini: Naj bo $F \in L^1(\mu \times \lambda)$. Tedaj je $f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak $x \in X$ in $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak $y \in Y$. Funkciji g in h sta v $L^1(\mu)$ in $L^1(\lambda)$. Oba dvakratna integrala sta enaka dvojnemu.

Opomba: $F \in L^1(\mu \times \lambda) \iff \int_{X \times Y} |F| d(\mu \times \lambda) < \infty$ preverimo s Tonellijem.

Dokaz: Tonelli: Po malem Fubinijevem izreku Tonellijev izrek velja, ko je $F = \chi_E$ za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Če je $0 \leq s$ stopničasta funkcija, za enakost integralov uporabimo aditivnost in nenegativno homogenost. Za merljivost uporabimo dejstvo, da so linearne kombinacije merljivih funkcij merljive.

Naj bo sedaj F splošna nenegativna merljiva funkcija. Po izreku o aproksimaciji obstaja zaporedje nenegativnih stopničastih s_n , da $0 \leq s_n \nearrow F$.

$$s_n \nearrow F \Rightarrow (s_n)_x \nearrow f_x \stackrel{\text{LMK}}{\Rightarrow} \int_Y (s_n)_x d\lambda \nearrow \int_Y f_x d\lambda$$

Zato je $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y (s_n)_x d\lambda$ in zato merljiva. Podobno h merljiva

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X d\mu(x) \int_Y (s_n)_x(y) d\lambda(y) \\ &\stackrel{\text{LMK}}{=} \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y) d\lambda(y) \end{aligned}$$

$$= \int_X d\mu(x) \int_Y F(x,y) d\lambda(y).$$

Podobno druga enakost.

Fubini: $F \in L^1(\mu \times \lambda) \Leftrightarrow \int_{X \times Y} |F| d(\mu \times \lambda) < \infty$

$$\Leftrightarrow \int_X d\mu(x) \underbrace{\int_Y |F(x,y)| d\lambda(y)}_{\bar{g}(x)} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \int_X \bar{g}(x) d\mu(x) < \infty$$

$$\Rightarrow \bar{g}(x) < \infty \text{ skoraj povsod} \Rightarrow \int_Y |F(x,y)| d\lambda(y) < \infty \text{ skoraj povsod}$$

$$\Rightarrow F_x \in L^1(\lambda) \text{ za skoraj vsak } x.$$

Podobno $F^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak y .

Ker je $\int_X \bar{g}(x) d\mu(x) < \infty$, je $\bar{g} \in L^1(\mu)$. Podobno $h \in L^1(\lambda)$.

Enakost med dvakratnimi in dvojnimi integraloma preverimo tako, da zapišemo $F = (Re F)^+ - (Re F)^- + i((Im F)^+ - (Im F)^-)$, upoštevamo linearnost integralov za L^1 funkcije in večkrat Tonellijev izrek. $\square$

Primer: $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \overset{\mu}{m})$ in $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ šteje točke.

Naj bo Δ diagonala v $[0,1] \times [0,1]$; $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$.

Δ je v $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Ali velja Tonelli za χ_Δ ?

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_\Delta(x,y) d\lambda(y) = \int_Y 1 d\mu(x) = 1$$

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_\Delta(x,y) d\mu(x) = \int_Y 0 d\lambda(y) = 0$$

Problem: λ ni σ -končna. Obstajajo tudi drugi primeri.

Opomba: Kaj narediti v primeru, ko mera ni σ -končna?

Če $F \in L^1(\mu)$: $X = \underbrace{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}_C \cup \underbrace{\{x \in X \mid f(x) = 0\}}_N$.

$$\int_X F d\mu = \int_C F d\mu$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X \mid |F(x)| \geq \frac{1}{n}\}}_{\text{komínna merina}} =: C_n$$

$$\infty > \int_X |F| d\mu \geq \int_{C_n} |F| d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(C_n)$$

Če imamo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$:
$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\|f_n\|_1 + 1)} \cdot |f_n|$$

$F \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$

Ker je $|f_n| \leq 2^n (\|f_n\|_1 + 1) \cdot f$ je $f_n|_C = 0$.

Za integral je $\int_X F_n d\mu = \int_C F_n d\mu$.