

Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

1. oktober 2025

Teorija mere $\approx$ realna analiza
 $\uparrow$
ta predmet

1. MERE

1.1. σ -algebre

Naj bo X neprazna množica. Družina podmnožic $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra, če velja:

- i) $X \in \mathcal{A}$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo iii') :

$$\text{iii')} \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A},$$

potem je $\mathcal{A}$ algebra.

Če je $\mathcal{A}$ σ -algebra, potem je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

Elementi $\mathcal{A}$ so merljive množice.

Opomba: i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka σ -algebra je algebra.

$$\text{iii)} \quad (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^{cc} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

Primeri: i) $X, \mathcal{A} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ trivialna σ -algebra
 $(X, \mathcal{A})$ je trivialni merljiv prostor

ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ potenčna σ -algebra

iii) X , $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ števna ali } E^c \text{ števna}\}$
povezana s topologijo končnih komplementov
Če je X neštevna, je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Trditev: Naj bo B družina podmnožic neprazne množice X .
Teda obstaja najmanjša σ -algebra na X , ki vsebuje B .
Ta je enaka preseku vseh σ -algeber, ki B vsebujejo.

Oznaka: σ -algebra iz trditve označimo z $\sigma(B)$.

Imenujemo jo tudi σ -algebra generirana z B .

Dokaz: $\mathcal{C} := \{\text{vse } \sigma\text{-algebre, ki vsebujejo } B\}$

$$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$$

Presek vseh σ -alg iz $\mathcal{C}$ je σ -algebra. (očitno)

Po definiciji mora biti najmanjša.

Borelove množice

$(X, \mathcal{T})$ topološki prostor

$\sigma(\mathcal{T})$ je Borelva σ -algebra; σ -algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je $A = (A^c)^c$, je $\sigma(\mathcal{T})$ generirana z zaprtimi množicami. Namesto $\sigma(\mathcal{T})$ pišemo $\mathcal{B}(X)$ ali $\mathcal{B}_X$.

$A \in \mathcal{B}(X)$ je

- F_σ množica, če je števna unija zaprtih množic
- G_δ množica, če je števen presek odprtih množic

Primer: $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}] \dots F_\sigma$
 $= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b) \dots G_\delta$

Trditev: $A \in \mathbb{R}^n$

i) A zaprta $\Rightarrow A$ je G_δ ,

ii) A odprta $\Rightarrow A$ je F_σ .

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generirana s katerakoli od spodnjih družin generatorjev:

i) $\mathcal{Z}_1 = \{ (a, b) \mid a < b \}$

ii) $\mathcal{Z}_2 = \{ [a, b] \mid a < b \}$

iii) $\mathcal{Z}_3 = \{ [a, b) \mid a < b \}$

iv) $\mathcal{Z}_4 = \{ (a, b] \mid a < b \}$

v) $\mathcal{Z}_5 = \{ (a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$

vi) $\mathcal{Z}_6 = \{ (-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R} \}$

vii) $\mathcal{Z}_7 = \{ [a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$

viii) $\mathcal{Z}_8 = \{ (-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$

Dokaz: i) $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\mathcal{Z}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števena unija odprtih odprtih int.,

je $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{Z}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}_1)$

"
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

ii) Ker je vsak (a, b) št. unija zaprtih int oblike $[a, b)$, je $\sigma(\mathcal{Z}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{Z}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: **Pozitivna mera** (ali zaenkrat samo mera) je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, ki ima naslednje lastnosti:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \dots$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iii) se imenuje **števena** ali **σ -aditivnost**.

$(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$, potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Primeri:

i) $X \neq \emptyset, x \in X \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

μ je mera, označimo jo z $\delta_x \dots$ **Diracova mera**

ii) $X \neq \emptyset; (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

mera štetja točk

iii) Naj bo X števna in

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & ; A \text{ števna} \\ 1 & ; A^c \text{ števna} \end{cases} \quad \text{je mera.}$$

Dokaz na vajah.

iv) X neskončna množica

$$\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

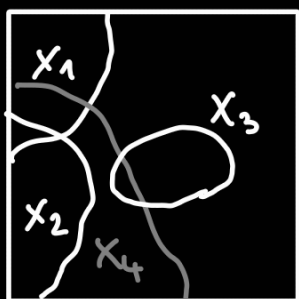
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & ; A \text{ končna} \\ \infty & ; \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Mera μ je **končna**, če je $\mu(X) < \infty$.

Mera μ je **σ -končna**, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \text{ in } \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



X

V definiciji σ -končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so paroma disj., z unijo X

ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je naraščajoče z unijo X

VPORABNO $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spl. $\leadsto X_1, X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2 \cup X_3, \dots$
Iz splošnega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje
 $\leadsto X_1, X_2 \setminus X_1, X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \dots$
št. unija paroma disjunktih

Lema: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija na algebri $\mathcal{A}$. Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B). \quad \text{MONOTONOST}$$

Dokaz: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A) \quad \square$$

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Tedaj za $\forall$ zap. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$

Tedaj so $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$.

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \quad \text{in} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

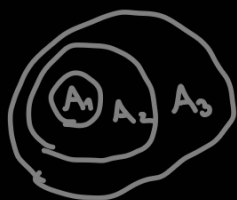
$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \square$$

Trditev: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija, kjer je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

Tedaj je μ mera $\Leftrightarrow \forall$ naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $(\Rightarrow)$: Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v $\mathcal{A}$.



$$B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_3 := A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\
\forall j, \mu(A_j) < \infty &\nearrow = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \dots + (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)
\end{aligned}$$

Če je $\mu(A_j) = \infty$, potem je $\mu(A_k) = \infty \quad \forall k \geq j$ in zaradi monotonosti mere velja enačaja v trditvi.

($\Leftarrow$): Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje paroma disjunktih množic v $\mathcal{A}$.

$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ Tedaj je $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče v $\mathcal{A}$.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

▮

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje mn. v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: Ker $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče je $(A_1 \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \stackrel{\text{prejšnja trditev}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$$

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\mu(A_1) < \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$



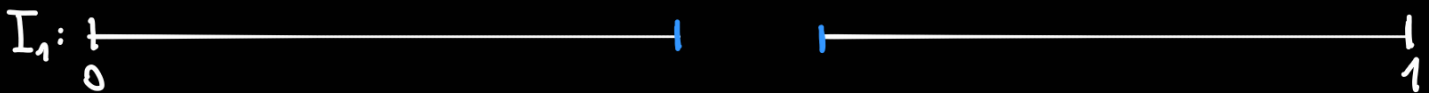
Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \quad \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokaže, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je $\mu(A_1) = \infty$.

Primer: Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I_1 : Izrežemo d_1 -ti delež okoli $1/2$ za $0 < d_1 < 1$.

I_2 dobimo tako, da od vsakega intervala iz I_1 izrežemo centralni interval deleža d_2 za $0 < d_2 < 1$.



Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I_n , ki je unija 2^n intervalov intervalov iste dolžine. Za $0 < d_{n+1} < 1$ iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža d_{n+1} . Če $1/3 = d_1 = d_2 = \dots$ dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ dobimo **posplošeno Cantorjevo množico**.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere,

ki se na intervalih vjemra z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$

$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)d_1 = m(I_0)(1-d_1) = 1-d_1$$

$$m(I_2) = m(I_1)(1-d_2) = (1-d_1)(1-d_2)$$

$$m(I_3) = (1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)$$

$$\vdots$$
$$m(I_n) = \prod_{k=1}^n (1-d_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1-d_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-d_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je $1/3 = d_1 = d_2 = \dots$, zato je $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} 2/3 = 0$.

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nihjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero $\prod_{k=1}^{\infty} (1-d_k)$. To je lahko $> 1 - \varepsilon$, ampak nihjer gosto!

Trditev: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} d_k$ konvergira.

8. oktober 2025

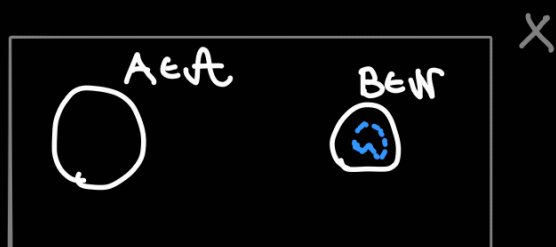
1.3. Napolnitev prostora z mero

Definicija: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. $A \in \mathcal{A}$ je μ -ničelna, če je $\mu(A) = 0$.

Označimo $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$.

Lema: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Dokaz: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$



Definicija: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je **poln**, če $\forall N \in \mathcal{N}$ in $B \subseteq N$ sledi $B \in \mathcal{A}$.

Izrek: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Naj bo

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A}, \exists N \in \mathcal{N}, S \subseteq N\}.$$

Tedaj je $\overline{\mathcal{A}}$ σ -algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Če za $A \cup S \in \overline{\mathcal{A}}$ definiramo $\bar{\mu}(A \cup S) := \mu(A)$, potem je $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ poln merljiv prostor.

Dokaz: $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$

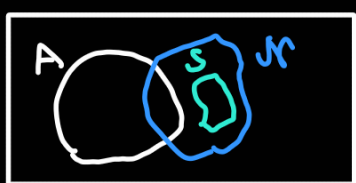
$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset$$

$\overline{\mathcal{A}}$ je σ -algebra

i) $X \in \overline{\mathcal{A}}$, ker $X = X \cup \emptyset$

ii) $A \cup S \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow (A \cup S)^c \in \overline{\mathcal{A}}$

$$\exists N \in \mathcal{N}, S \subseteq N$$



$$\begin{aligned} (A \cup S)^c &= A^c \cap S^c = A^c \cap (N^c \cup N \setminus S) \\ &= \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \setminus S)}_{\subseteq N \in \mathcal{N}} \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad A_n \cup S_n \in \bar{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. N_n \in \mathcal{N}. S_n \subseteq N_n$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$$

$\mu: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$ je dobro definirana pozitivna mera

$$\begin{aligned} E \in \bar{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \\ S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{N}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{N} \\ \Rightarrow \underline{\mu(A_1)} = \underline{\mu(A_2)} \end{aligned}$$

$$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$$

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$$

Podobno $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.

$\bar{\mu}$ je mera:

$$\cdot \quad \bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

Naj bo $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disj. zap. mn. u $\bar{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \right) &= \bar{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup S_n) \end{aligned}$$

$(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ je poln

$$\bar{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \Rightarrow S \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$$

Po definiciji je $\mu(N) = 0$

$$\mu(A) \Rightarrow A \in \mathcal{N}$$

$$S = \emptyset \vee S; \quad S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{N}$$



Primer: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. (Brez dokaza.)

Če je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$, bi bilo $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \rightarrow \times$

Torej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ ni poln prostor.

Napolnitev je Lebesgueova σ -algebra.

$$\Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Imamo } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

$\uparrow$ prava vsebovanost?

Primer: Pokazali bomo, da na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.

μ je translacijsko invariantna, če za $\forall A$ velja $\mu(A+x) = \mu(A)$. $A+x := \{a+x \mid a \in A\}$.

Na $\mathbb{R}$ vpeljemo relacijo $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ razpade na ekvivalenčne razrede 14. oktober 2025

$\mathbb{R}/\sim$ kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sledilo bo, da obstajajo Lebesgueovo nemerljiva mn.

$\forall x \in [-1, 1]$ izberemo predstavnika ekv. razreda $[x]$, ki leži v $[-1, 1]$. Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo S množica vseh enakokoličnih izbranih predstavnikov. Velja $S \subseteq [-1, 1]$.

Def. $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$.

Def. $\mathcal{F} = \{r + s \mid r \in \mathbb{Q}_1\} \leftarrow$ števna množica

Velja: i) $(r+s) \cap (r'+s) = \emptyset$ za $r \neq r'$

$$r+s = r'+s \Rightarrow s-s = r-r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow s' \sim s \quad \times$$

$$\text{ii) } [-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+s)$$

$x \in [-1, 1]$. $\exists s \in S \subseteq [-1, 1]$, da je $x \sim s$

$$q := x - s \in \mathbb{Q}$$

$$|q| \leq |x| + |s| \leq 2 \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+s)$$

$$\text{Velja } [-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+s) \subseteq [-3, 3].$$

Če bi obstajala transl. inv. mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+s)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r+s) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(s) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo konstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb. σ -algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato S ni Leb. merljiva.

1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici X je funkcija $\xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, za katero velja:

$$\text{i) } \xi(\emptyset) = 0$$

$$\text{ii) } \xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$$

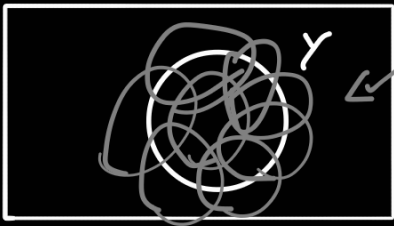
$$\text{iii) } \xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \quad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$$

$\uparrow$
vedno def. na
 $\mathcal{P}(X)$

Trditev: Naj bo S družina podmnožic neprazne množice X , ki vsebuje $\emptyset$ in X . Naj bo $\mu: S \rightarrow [0, \infty]$ funkcija za katero velja $\mu(\emptyset) = 0$. Definiramo $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanja mera.



← pokritje z množicami iz S

Dokaz: i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B$. neko pokritje za B je pokritje za A
 $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) Neenakost drži, če je $\mu^*(A_n) = \infty$ za nek $n \in \mathbb{N}$.
 Predpostavimo, da je $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\varepsilon > 0$. Za $n \in \mathbb{N} \exists$ pokritje $(A_{n,j})_j$ za A_n , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n,j}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$$

$\Rightarrow (A_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$ je števno pokritje za $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n,j}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, dobimo števno subaditivnost. ▣

Definicija: Naj bo ξ zunanja mera na $\mathcal{P}(X)$. Množica $A \subseteq X$ je **zunanje merljiva** oziroma **ξ -merljiva**, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$

za vsak $Y \subseteq X$.



Da preverimo $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$, moramo preveriti $\leq$ in $\geq$. $\leq$ sledi iz (iii) def. zunanje mere. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \quad (*)$$

Če $\xi(Y) = \infty$, potem (*) velja, sicer moramo preveriti.

Carathéodoryjev izrek: Naj bo ξ zunanja mera na X .

Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ -algebra, trojica $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ pa je poln merljiv prostor.

Dokaz: $\mathcal{A}_\xi$ je σ -algebra

$$\begin{aligned} \text{i) } Y \subseteq X &\Rightarrow \xi(Y) \stackrel{?}{=} \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y). \\ &\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(Y \cap A) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$$

Najprej bomo dokazali, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprt za končne unije, torej algebra, zaprtost za številne unije pa bomo dokazali hkrati s številno aditivnostjo $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ za številne disjunktne družine množic.

$$A, B \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$$

$$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \xi(A \cap Y \cup B \cap A^c \cap Y) + \xi(A^c \cap B^c \cap Y) \\
&\leq \xi(A \cap Y) + \xi(B \cap A^c \cap Y) + \xi(B^c \cap A^c \cap Y) \\
&= \underset{\substack{\uparrow \\ B \in \mathcal{A}_\xi}}{\xi(A \cap Y)} + \xi(A^c \cap Y) \underset{\substack{\uparrow \\ A \in \mathcal{A}_\xi}}{=} \xi(Y).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$ je algebra.

Naj bodo $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$

$$A_1 = A_1, \quad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$$

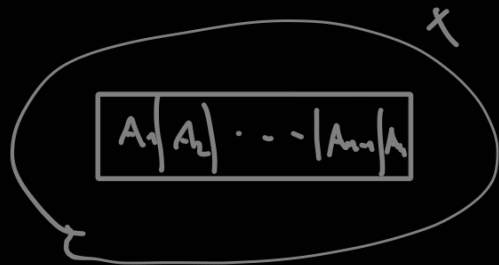
Dokazali bomo, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za števne disjunktne unije in ker je $\mathcal{A}_\xi$ algebra, bo sledilo, da je $\mathcal{A}_\xi$ σ -algebra.

Naj bodo $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne mn. iz $\mathcal{A}_\xi$.

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y \in \mathcal{X} \Rightarrow \xi(Y \cap B_n) = \xi(Y \cap B_n \cap A_n) + \xi(Y \cap B_n \cap A_n^c)$$



$$= \xi(Y \cap A_n) + \xi(Y \cap B_{n-1})$$

$$= \dots = \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j)$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$ je končno aditivna na $\mathcal{A}_\xi$

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j) \quad \text{Ker } \xi \text{ stevno subaditivna, je}$$

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in \mathcal{A}_{\xi}$

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).$$

Ker je ξ št. subaditivna je $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$.

$\Rightarrow B \in \mathcal{A}_{\xi}$.

$(X, \mathcal{A}_{\xi}, \xi|_{\mathcal{A}_{\xi}})$ je poln merljiv prostor

$M \in \mathcal{A}_{\xi}$ in $\xi(M) = 0, N \subseteq M$

$$Y \subseteq X. \quad \underbrace{\xi(Y \cap N) + \xi(Y \cap N^c)}_{\text{monotonost}} = \xi(Y \cap N^c) \leq \xi(Y)$$

$$\xi(Y) \leq \underbrace{\xi(Y \cap N) + \xi(Y \cap N^c)}_{\text{subaditivnost}}$$



1.5. Mera na algebri:

Mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, za katero velja:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \dots$ paroma dij. v $\mathcal{A}$ in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $Y \subseteq X$ definiramo zunanjo mero

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Todaj je $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Dokaz: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$$

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za A z množicami iz $\mathcal{A}$.

$$B_1 = A \cap A_1, \quad B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1), \quad B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)), \dots$$

$B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap A \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

To velja za vsako pokritje $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$, zato tudi v infimumu dobimo isti neenačaj $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$$

15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$ in $Y \subseteq X$. Da je $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ moramo preveriti, da je $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \stackrel{(*)}{=} \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X, \mu^*(Y) < \infty$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ za Y , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap Y) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \quad \text{in} \quad \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n). \\ \Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pošljimo $\varepsilon \rightarrow 0$ in dobimo $(*)$. ▣

Nekaj oznak: $\mathcal{A}$ je algebra, μ_0 je mera na algebri, $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$.
 $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ $\mathbb{Z}$ σ -algebra

Izrek: Naj bodo $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in μ kot zgoraj.

- i) Naj bo ν mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0 . Tedaj velja $\nu(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.
- ii) Če je $\mu(A) < \infty$, potem je $\nu(A) = \mu(A)$ za vsako razširitev mere μ_0 .

iii) Če je μ_0 σ -končna mera na algebri, potem je μ enolično dobljena razširitev mere μ_0 do mere na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

Dokaz: i) Naj bo γ mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0 . Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ z množicami iz $\mathcal{A}$. Tedaj je

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\gamma(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in $\mu(A) < \infty$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poiščimo pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za A z množicami iz $\mathcal{A}$, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\mu(A)} + \varepsilon.$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \gamma(B) = \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \gamma|_{\mathcal{A}} = \mu_0 \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \mu(B)$$

Ker je μ mera, je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) < \varepsilon$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \gamma(B)$$

$$\begin{aligned}
&= \nu(A) + \nu(B \setminus A) \\
&\leq \nu(A) + \mu(B \setminus A) \\
&< \nu(A) + \epsilon
\end{aligned}$$

Ker je $\epsilon > 0$ poljuben, je $\mu(A) \leq \nu(A)$

iii) Naj bo μ_0 σ -končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu_0(A_n) < \infty, \quad \mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)$$

$$A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*} \Rightarrow A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$$

BŠS izberimo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \stackrel{ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap A_n) = \nu(A) \quad \square$$

1.6. polmere in polalgebre

Definicija: Polalgebra je množica $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki zadošča:

- i) $\emptyset \in \mathcal{Y}$.
- ii) $A, B \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Y}$.
- iii) $A \in \mathcal{Y} \Rightarrow A^c$ je končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{Y}$.

Primer: $\mathcal{Y}(\mathbb{R}) = \{[a, b), (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo $\mathcal{Y}$ polalgebra in $\mu: \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$ preslikava. μ je polmera, če velja:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$
- ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Y}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{Y}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

iii) Če so $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,
potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Trditev: Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na množici X . Tedaj je algebra generirana z $\mathcal{S}$, enaka družini vseh končnih disjunktne unij iz $\mathcal{S}$.

Simbolično: $\mathcal{F} \dots$ polalgebra

$$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \dots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} \text{ paroma disjunktne}\}$$

Dokaz: $\mathcal{A}$ je algebra, ki očitno vsebuje $\mathcal{F}$.

Po definiciji bo $\mathcal{A}$ vsebovala, algebro generirano z $\mathcal{F}$, zgornji opis pa pomeni, da bo $\mathcal{A}$ vsebovala v algebri generirani s $\mathcal{F}$.

$\mathcal{A}$ je algebra

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ polalgebra) $\checkmark$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iü) z končne preseke in nato še ii) "Nova" (ii) in iü) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iü) zaradi de Morganovega pravila.

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_n, \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$$

$\Rightarrow A \cap B_j \in \mathcal{F}$, saj je $\mathcal{F}$ polalgebra in

$$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$$

Če je $i \neq k$ ali $j \neq l$, je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$ je končna unija paroma disjunktih $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i; \quad A_i \in \mathcal{F} \text{ paroma disj.}$$

$$A^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c$$

Ker je A_i^c po def $\mathcal{A}$ in aks. za σ -algebro v $\mathcal{A}$, je $A^c \in \mathcal{A}$ po iii). ▣

Trditev: Naj bo $\mathcal{F}$ polalgebra na mn. X in naj bo μ polmera na $\mathcal{F}$. Tedaj obstaja natanko ena razširitev μ do mere $\tilde{\mu}$ na algebri generirani s $\mathcal{F}$.

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \mu(\tilde{A}) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ paroma disj. in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z $\mathcal{F}$ je v (*) enačaj.

1.7. Lebesgue - Stieltjesove mere

Naj bo X topološki prostor. Mera je **Borelova**, če je definirana na Borelovi σ -algebri $\mathcal{B}(X)$.

Trditev: Naj bo μ Borelova mera na $\mathbb{R}$, ki je končna na vseh omejenih Borelovih množicah realne osi.

Def: $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, x]); & x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -\mu((x, 0]); & x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je F_μ naraščajoča in levozvezna.

i) $a < b \Rightarrow \mu([a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je μ končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu((-\infty, 0]),$$

kjer je $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

Dokaz: F_μ naraščajoča, saj je μ monotona

Dokažimo, da je F_μ levozvezna. Naj bo

$$x > 0. \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, \infty), \text{ da } x_n \nearrow x$$

$$F_\mu(x) = \mu([0, \infty)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, \infty)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n).$$

Primeru $x \leq 0$ se lotimo na podoben način.

$$\begin{aligned} \text{i) } 0 < a < b : \mu([a, b]) &= \mu([0, b] \setminus [0, a]) \\ &= \mu([0, b]) - \mu([0, a]) \\ &= F_\mu(b) - F_\mu(a) \end{aligned}$$

Podobno v ostalih primerih.

$$\begin{aligned} \text{ii) } F(x) &= \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, 0) \cup (0, x)) \\ &= \mu((-\infty, 0)) + F_{\mu}(x). \end{aligned} \quad \square$$

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ porodi Borelovo mero. Naj bo torej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna.

Tedaj obstajata

$$f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ vseh intervalov oblike $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ in $\emptyset$ definiramo preslikavo μ_f s predpisom:

$$\begin{aligned} \mu_f(\emptyset) &:= 0 \\ \mu_f([a, b]) &:= f(b) - f(a) \\ \mu_f([a, \infty)) &:= f(\infty) - f(a) \\ \mu_f((-\infty, b]) &:= f(b) - f(-\infty) \end{aligned}$$

Izrek [Lebesgue-Stieltjes]: μ_f je polmera na polalgebri $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Dokaz: (i): Po definiciji je $\mu_f(\emptyset) = 0$.

(ii) Naj bo $[a, b]$ končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{I}$:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i], \quad [a_i, b_i] \text{ so parno disj.}$$

$$\mu_f([a, b]) = \mu_f\left(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]\right) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{intervali so urejeni tako, da} \\ \text{se nadaljujejo} \end{array}$$

$$f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) = f(a_1) - f(b_n) = f(a) - f(b_n)$$



Na podoben način preverimo $[a, \infty)$ in $(-\infty, b)$. DN

(iii): Preverimo števno svbaditivnost za μ_f .

Naj bo interval $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ števna disj. unija intervalov I_m iz $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

$$\mu_f(I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m)$$

1. primer: $I = [a, b) \Rightarrow I_m = [a_m, b_m)$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f levo zvezna, obstaja $c < b$ in $c_j < a_j$, da je $f(c) > f(b) - \varepsilon/2$ in $f(c_j) > f(a_j) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}$



Kompaktni interval $[a, c]$ pokrijemo z odprtimi intervali $\{(c_j, b_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$. Obstaja končno podpokritje.

Točka a je vsebovana v nekem (c_j, b_j) . BŠS $a \in (c_1, b_1)$



Če je $b_1 > c$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1)$, sicer imamo BŠS $b_1 \in (c_2, b_2)$



Če je $b_2 > c$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1) \cup (c_2, b_2)$, sicer

Postopek nadaljujemo. Po končno korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale $(c_1, b_1), (c_2, b_2), \dots, (c_n, b_n)$, da je $c_1 < a$, $c_{j+1} < b_j$ za $j = 1, \dots, n-1$, $b_n > c$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m))}_{\text{indeksi na začetku}} &\geq \underbrace{\sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j))}_{\text{indeksi po preimenovanju}} \\
&\geq \left(\sum_{j=1}^n f(b_j) - f(c_j) \right) - \varepsilon/2 \\
&= -f(c_1) + \underbrace{\left(\sum_{j=2}^{n-1} (f(b_j) - f(c_{j-1})) \right)}_{\geq 0} + f(b_n) - \varepsilon/2 \\
&\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2 \\
&> -f(a) + (f(b) - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \\
&= f(b) - f(a) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \geq f(b) - f(a)$$

2. primer: $[a, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$

$$f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j))$$

Za $n \in \mathbb{N}$: $[a, n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, \min\{n, b_j\})$

Po prejšnjem primeru velja:

$$\begin{aligned}
f(n) - f(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} (f(\min\{b_j, n\}) - f(a_j)) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j))
\end{aligned}$$

Ostali primeri DN.



Na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ imamo polmero μ_f :

$$\mu_f(\emptyset) = 0, \mu_f((a, b)) = f(a) - f(b), \mu_f([a, \infty)) = f(\infty) - f(a), \mu_f((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty)$$

Po izreku lahko μ_f razširimo na en sam način do mere μ_f na algebro $\mathcal{A}$ generirano z $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. Tvorimo zunanjo mero μ_f^* na $\mathbb{R}$. Po Carathéodorievem izreku je množica $\mathcal{A}_{\mu_f^*}$ vseh μ_f^* merljivih množic σ -algebra, ki vsebuje vse intervale oblike $[a, b)$. Torej $\mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
 Dodatno: $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}})$ je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$... Lebesgueova σ -algebra, ki je napolnitev Borelove σ -algebre.

Mera $\mu_f^* =: \mu$ je **Lebesgue-Stieltjesova** mera. Po izreku od zadnjic je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z $\mathcal{I}(\mathbb{R})$, saj je tista mera σ -končna.

Poseben primer: $f(x) = x \Rightarrow$ Dobimo **Lebesgueovo** mero.
 Označimo jo z **m**.

22. oktober 2025

Posledica: Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj velja $m(x + A) = m(A)$ in $m(x \cdot A) = |x| m(A)$.

Dokaz: Naj bo m_x definirana na $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$m_x(A) := m(x + A).$$

m_x je polmera na $\mathcal{I}(\mathbb{R})$, $x + [a_1, b_1) \cup \dots \cup [a_n, b_n) = \bigcup_{i=1}^n (x + [a_i, b_i))$ ki se ujema z m na $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Če je $\mathcal{A}$ alg. gen. z $\mathcal{I}(\mathbb{R})$, potem se m_x in m ujemata tudi na $\mathcal{A}$. Uporabimo Carathéodoria za $(\mathcal{A}, m)$ in $(\mathcal{A}, m_x)$. V obeh primerih dobimo σ -algebro, ki vsebuje $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ker sta m in m_x σ -končni na $(X, \mathcal{A})$, sta enolično razširljivi na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dokaz druge enakosti podobno.



Spomnimo se: $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*)_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}}$

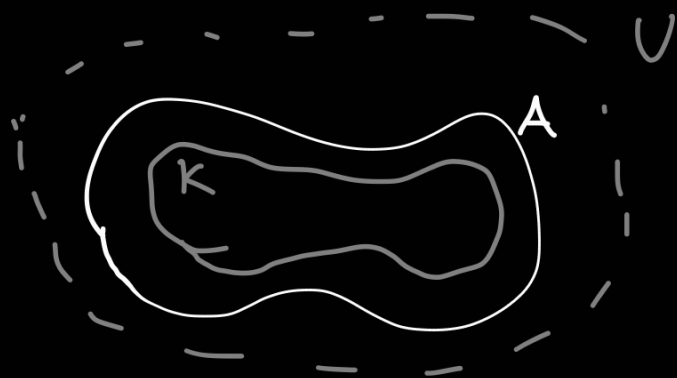
$$A \in \mathcal{A}_{\mu_F^+} \leadsto \mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$ je končna disjunktna unija intervalov oblike $[a, b), (-\infty, b), [a, \infty)$.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m]) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\}\end{aligned}$$

Trditev: Naj bo μ_f Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, porajena z naraščajočo levozvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m) \right\}.$$



$$\mu(u) \approx \mu(A)$$

$$\mu(K) \approx \mu(A)$$

Dokaz: Označimo desno stran z $y(A)$.

Vsak interval (a_n, b_n) je števna disjunktna unija intervalov oblike $[a_{n,m}, b_{n,m})$. Po definiciji infimuma je $\mu(A) \leq \nu(A)$.

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije f . Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $\mu(A) < \infty$. Tedaj za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}_1$ da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \text{ in}$$



$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$$

Ker je f levozvezna, za $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n' < a_n$, da je

$$f(a_n') > f(a_n) - \varepsilon/2^n$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n', b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n')) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n')) \right) - \varepsilon$$



$$\Rightarrow \mu(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n'))$$

Zaradi monotonosti mere je potem $\mu(A) \geq v(A)$. $\square$

Izrek: Za $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ velja

$$m(A) = \inf \{ m(U) \mid A \subseteq U^{\text{odp}} \} \quad (*)$$

$$= \sup \{ m(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \} \quad (**)$$

Dokaz [prva enakost]: (druga mogoče karneje - Rieszov izrek).

$$A \subseteq U \Rightarrow m(A) \leq m(U)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf \{ m(U) \mid U^{\text{odp}} \supseteq A \}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m([a_n, b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Rightarrow m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n))$$



(*)... zunanja regularnost mera, (**)... notranja regularnost mere
(inf po odprtih mn.) (sup po komp. mn.)